Compléments d'analyse 2, 2022-2023.

Exercice 1. : Exponentielle complexe. On va montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right)_{N \in \mathbb{N}} \tag{1}$$

est convergente. On note par $\exp(z)$ ou e^z sa limite.
On **admet** la propriété suivante :

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \;=\; \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,. \tag{2}$$

On construit maintenant la fonction exponentielle complexe et on en détermine quelques propriétés. On établit aussi des propriétés de l'exponentielle réelle, la restriction à $\mathbb{R}$ de l'exponentielle complexe.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite $\alpha = (|a|^k/(k!))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
   (Indication : on pourra considérer le rang $N = E(|a|)$.)

2. En déduire que α tend vers 0.
   (On pourra utiliser la sous-suite $(\alpha_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ de α.)

3. En déduire qu'il existe $C_a > 0$ tel que C_a majore α.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. On note par s la suite (1). On note par C le C_a précédent pour $a = 2z$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| s_{n+p} \,-\, s_n \right| \;\leq\; \frac{C}{2^{n+1}} \sum_{l=0}^{p-1} 1/2^l \;=\; C\, 2^{-n-1}\, \frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2} \;\leq\; C\, 2^{-n}\,.$$

5. En déduire que s est une suite de Cauchy.
   Par le cours, elle converge donc dans $\mathbb{C}$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| \overline{\exp(z)} \,-\, \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} \right| \;=\; \left| \exp(z) \,-\, \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right|\,.$$

7. En déduire que $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

8. Vérifier que $\exp(0) = 1$.

9. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\exp(z) \in \mathbb{C}^*$ et que $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$.
   (Indication : on pourra utiliser (2)).

10. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\exp(x) \in \mathbb{R}$.

11. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que $\exp(x) \geq 1$.

12. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$.

13. Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $((m+1)!)\exp(x) \geq x^{m+1}$.

14. En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} x^{-m} \exp(x) \;=\; +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^{m} \exp(x) \;=\; 0\,.$$

Exercice 2. : On présente ici une preuve du fait que la fonction exponentielle réelle est dérivable et qu'elle est sa propre dérivée.
Par l'exercice 1, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite

$$\big(f_n(x)\big)_n \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_n$$

est convergente vers une limite réelle strictement positive que l'on note $f(x)$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc la fonction exponentielle réelle.

1. Soit $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que

$$f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x) \;=\; \sum_{k=2}^{n} \sum_{l=0}^{k-2} \frac{x^l}{l!} \cdot \frac{y^{k-l}}{(k-l)!}\,. \tag{3}$$

2. En déduire que, pour $y \in [-1; 1]$,

$$\big|f_n(x+y) - f_n(x) - y f_{n-1}(x)\big| \;\leq\; y^2 \sum_{k=2}^{n} \sum_{l=0}^{k-2} \frac{|x|^l}{l!} \cdot \frac{1}{(k-l)!}\,. \tag{4}$$

3. Montrer que le membre de droite de (4) est exactement

$$y^2\big(f_n(|x|+1) \;-\; f_n(|x|) \;-\; f_{n-1}(|x|)\big)\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser (3) pour $(x; y)$ remplacé par $(|x|; 1)$.)

4. Déduire des deux questions précédentes que

$$\big|f(x+y) - f(x) - y f(x)\big| \;\leq\; y^2\big(f(|x|+1) - 2f(|x|)\big)\,.$$

5. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Quelle est sa dérivée ?

Exercice 3. : L'objectif de cet exercice est de montrer que, pour $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$ fixé, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(\alpha + t\beta)$ est dérivable de fonction dérivée $\mathbb{R} \ni t \mapsto \beta \exp(\alpha + t\beta)$.
On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)$ est la limite de la suite (1) de l'exercice 1, c'est-à-dire

$$\exp(z) \;=\; \lim_{n\to+\infty} f_n(z)\,, \quad \text{où, pour } n \in \mathbb{N}\,,\; f_n(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\,.$$

1. Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $h \in \mathbb{R}$, $\varphi(h) = \exp(a+bh)$. Montrer que, pour $h \in \mathbb{R}$ avec $|hb| \leq 1$ et $n \in [\![2;+\infty[\![$,

   $$\big|f_n(a+bh) \;-\; f_n(a) \;-\; bh \cdot f_{n-1}(a)\big| \;\leq\; h^2 \cdot b^2 \cdot \big(f_n(|a|+1) \;-\; f_n(|a|) \;-\; f_{n-1}(|a|)\big)\,.$$

   (Indication : on pourra s'inspirer du début de l'exercice 2.)

2. En déduire que, pour $h \in \mathbb{R}$ avec $|hb| \leq 1$,

   $$\big|\varphi(h) - \varphi(0) - h \cdot b\varphi(0)\big| \;\leq\; h^2 \cdot b^2\big(\exp(|a|+1) - 2\exp(|a|)\big)\,.$$

3. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \exp(\alpha + t\beta)$. Montrer que ψ est dérivable en t_0 de nombre dérivé $\beta\psi(t_0)$.

Exercice 4. : Dans cet exercice, on démontre la relation (2) de l'exercice 1. On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)$ est la limite de la suite (1) de l'exercice 1. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.

1. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{C}^2$. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$,

   $$g(t) \;=\; \exp(\alpha + t\beta) \cdot \exp(-t\beta)\,.$$

   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle.

2. Montrer que g est constante.
   (Indication : on pourra utiliser les fonctions réelles $\Re(g)$ et $\Im(g)$.)

3. En déduire, pour $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$, l'égalité $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$.
   (Indication : on pourra utiliser $g(0)$ et $g(1)$ pour $(\alpha;\beta)$ bien choisi.)