Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
MEEF 1.

Complément : Angles.

Exercice 1. : Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ définie par $\varphi(x) = \exp(ix)$. On a vu dans le cours que φ est bien définie (i.e. à valeurs dans $\mathbb{S}^1$). On définit les fonctions cosinus et sinus par $\cos(x) = \Re(\varphi(x))$ et $\sin(x) = \Im(\varphi(x))$, pour $x \in \mathbb{R}$. Pour $b \in \mathbb{R}$, on note par $b\mathbb{Z}$ le sous-ensemble de $(\mathbb{R}; +)$ constitué des nb, pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que φ et la fonction $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, définie par $\overline{\varphi}(x) = \exp(-ix)$, sont de classe C^1. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = i\varphi(x)$ et $\overline{\varphi}'(x) = -i\overline{\varphi}(x)$. En déduire que cos et sin sont aussi de classe C^1, que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Vérifier que $\varphi(0) = 1$. Montrer que φ n'est pas constante.
2. Montrer que φ est un morphisme de groupes. On pose $K = \varphi^{-1}(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\sin(x) = 0$ alors $2x \in K$. Montrer que si $\cos(x) = 0$ alors $4x \in K$.
3. On suppose que φ est injective. Montrer qu'alors la fonction cos ne prend que des valeurs strictement positives. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \cos(x)$ existe et vaut $-\infty$. (Indication : on pourra utiliser le théorème des accroissements finis.) En conclure qu'on a une contradiction.
4. Montrer que $K \cap \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$. On pose $a = \inf K \cap \mathbb{R}^{+*}$. On a $a \geq 0$.
5. On suppose que $a = 0$.
   a). Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, $K \cap]y - \epsilon; y + \epsilon[\neq \emptyset$. (Indication : on pourra montrer l'existence d'un $b \in]0; \epsilon[\cap K$ et effectuer la division euclidienne de y par b.)
   b). Montrer qu'il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers y.
   c). En déduire que $\varphi(y) = 1$.
   d). Établir une contradiction.
6. Par la question précédente, on sait que $a > 0$.
   a). Montrer que $\varphi(a) = 1$.
   b). En déduire que $a\mathbb{Z} \subset K$.
   c). Montrer par l'absurde que $K \subset a\mathbb{Z}$. (Indication : on pourra utiliser la division euclidienne par a.)
7. Par les questions précédentes, on sait que $K = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$. On verra plus loin que $a = 2\pi$, où π est le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre.
   a). Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ données par $z^2 = 1$ et $z^2 = -1$.
   b). En déduire que $\varphi(a/2) = -1$ et $\varphi(a/4) \in \{-i; i\}$. Montrer que $\varphi(-a/2) = -1$.
   c). Montrer que sin ne s'annule pas sur $]0; a/2[$. (Indication : on pourra utiliser 2.)
   d). Montrer que sin est strictement positive sur $]0; a/2[$. En déduire que $\varphi(a/4) = i$.
   e). Montrer que l'image $\cos([0; a/4])$ de l'intervalle $[0; a/4]$ par la fonction cos est l'intervalle $[0; 1]$.

8. On montre dans cette question que φ est surjective.
   a). Soit $z \in \mathbb{S}^1$. Montrer que l'un des complexes parmi z, $\overline{z}$, $-z$ ou $-\overline{z}$ a ses parties réelle et imaginaire positives.
   b). Soit $z \in \mathbb{S}^1$ ayant des parties réelle et imaginaire positives. Montrer que $z \in \varphi([0; a/4])$.
   c). En déduire que $\mathbb{S}^1 = \varphi(]-a/2; a/2])$. Vérifier que la restriction de φ à l'intervalle $]-a/2; a/2]$ est injective.
9. Détermination de a. On rappelle que la longueur de l'image, notée $\mathrm{Im}\gamma$, d'une courbe paramétrée $\gamma :]t_0; t_1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, avec $t_0 < t_1$, donnée par $\gamma(t) = (x(t); y(t))$ et de classe C^1, est
$$L(\mathrm{Im}\gamma) \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,.$$
   a). Montrer que $\mathbb{S}^1$ est l'image d'une courbe paramétrée injective de classe C^1. Calculer sa longueur en fonction de a.
   b). Montrer que le rapport de la circomférence d'un cercle à son diamètre est $a/2$. **Par définition de π, on a donc $a = 2\pi$.**
10. Surjectivité de l'exponentielle complexe. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer qu'il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\varphi(\theta)$. En déduire qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z = \exp(z')$.

Commentaire :
L'application φ ci-dessus donne une réalisation analytique des notions géométriques d'angle orienté de demi-droites et de mesure d'angle.
Pour $z \in \mathbb{S}^1$, les mesures de l'angle orienté des demi-droites $[0; z)$ et $[0; 1)$ du plan complexe sont les éléments de $\varphi^{-1}(z)$. Ce qu'on appelle angle orienté de demi-droites associé à $[0; z)$ et $[0; 1)$ est cet ensemble $\varphi^{-1}(z)$. C'est la classe d'équivalence de tout réel de $\varphi^{-1}(z)$ pour la relation d'équivalence $\mathbb{R}$ donnée par, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in K = 2\pi\mathbb{Z}$. Les mesures d'un même angle diffèrent donc les unes des autres d'un multiple entier de 2π.
On note que la surjectivité de φ assure que, à toute demi-droite $[0; z)$, on peut lui associer un angle de demi-droite basé sur $[0; 1)$.
On peut voir φ comme la projection d'une hélice sur le cercle unité d'un plan.
La surjectivité de l'exponentielle est importante puisqu'elle assure que tout nombre complexe non nul peut se mettre sous forme trigonométrique.