Université de Cergy-Pontoise. Master MEEF 1.

Complément sur la dénombrabilité.

Exercice 1. : Soit E, F et G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose f injective. Montrer que l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ est bijective.

En particulier, la composition de deux bijections est une bijection.

Exercice 2. : Soit A un ensemble. On dit qu'il est fini s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et une bijection $j : A \longrightarrow [\![1; p]\!]$. Dans ce cas, le p est unique et c'est le nombre d'éléments de A. On dit qu'il est au plus dénombrable s'il existe une injection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. C'est le cas des ensembles finis. On dit qu'il est dénombrable s'il existe une bijection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'ensemble est forcément infini (car $\mathbb{N}$ l'est).
On pourra utiliser l'exercice 1.

1. Montrer que l'application $j_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_1(-n) = 2n + 1$, $j_1(n) = 2n$ et $j_1(0) = 0$, est bijective. $\mathbb{Z}$ est donc dénombrable.
2. Montrer que l'application $j_2 : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $j_2(n) = n-1$, est bijective. $\mathbb{N}^*$ est donc dénombrable.
3. Construire une application bijective $j_3 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
4. Construire une application bijective $j_4 : \mathbb{Q} \longrightarrow F$, où
$$F \;=\; \{(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*; p/q \,\text{est irréductible}\}\,.$$
5. Pour $s \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble fini $D_s = \{(n; m) \in \mathbb{N}^2; n + m = s\}$ que l'on ordonne $D_s = \{a_0(s); a_1(s); \cdots ; a_s(s)\}$ dans l'ordre croissant des ordonnées.
   a). Déterminer et représenter graphiquement les ensembles D_0, D_1, D_2, D_3 et D_4.
   b). Vérifier que $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est la réunion disjointe des ensembles D_s, pour $s \in \mathbb{N}$.
   c). On construit par récurrence une application $j : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ de la façon suivante. On pose $j(0; 0) = 0$. Supposons contruites les restrictions $j_{|D_s}$ de j à D_s, pour $s \leq N$, telles que, pour $1 \leq s \leq N$, pour $0 < p \leq s$,
$$j(a_0(s)) \;=\; j(a_{s-1}(s-1)) + 1 \quad \text{et} \quad j(a_p(s)) \;=\; j(a_{p-1}(s)) + 1\,.$$
   Vérifier que cette propriété est héréditaire. L'application j est donc bien définie par le théorème de récurrence.
   d). Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in j(\mathbb{N}^2)$.
   e). Montrer que, pour $s \in \mathbb{N}$, $p \mapsto j(a_p(s))$ est strictement croissante. En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\max(j(D_s)) < \min(j(D_{s+1}))$.
   f). En déduire que j est bijective.
6. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. (Indication : on pourra utiliser $j \circ j_3 \circ j_4$).

7. Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Vérifier que la suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow D$ donnée par $u_0 = \min D$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \min(D \setminus \{u_0; u_1; \cdots; u_n\})$, est bien définie et strictement croissante. En déduire que u est bijective. D est donc dénombrable.
8. Soit A un ensemble au plus dénombrable. Il existe donc une injection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Montrer que A est soit fini soit dénombrable. (Indication : on pourra considérer les cas "$j(A)$ est fini" et "$j(A)$ est infini".)
9. Soit A un ensemble fini ou dénombrable. Contruire une injection $j : A \longrightarrow \mathbb{N}$.
10. Montrer qu'une partie d'un ensemble au plus dénombrable est aussi au plus dénombrable.
11. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de parties de $\mathbb{R}$ au plus dénombrables.
    a). Construire une application injective s de $\cup_{i \in I} B_i$ vers l'union disjointe des B_i qui est définie par

$$\bigsqcup_{i \in I} B_i \ := \ \big\{(i; x)\,; \quad i \in I \quad \text{et} \quad x \in B_i\big\}\,.$$

    b). Construire une application injective J de $\sqcup_{i \in I} B_i$ vers $\mathbb{N}^2$.
    c). En déduire que $\cup_{i \in I} B_i$ est au plus dénombrable.

Exercice 3. : On montre dans cet exercice que l'intervalle $]0; 1[$ de $\mathbb{R}$ est non dénombrable. Pour ce faire, on va utiliser le **procédé diagonal de Cantor**. Dans l'optique d'une preuve par l'absurde, on suppose que $]0; 1[$ est l'ensemble des termes d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire le développement décimal de u_n :

$$u_n \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{nk}}{10^k}\,.$$

On considère la suite de chiffres $(c_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ (avec $c_k \in [0; 9] \cap \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) définie par $c_k = 4$ si $v_{kk} \neq 4$ et $c_k = 3$ si $v_{kk} = 4$. On considère le nombre réel

$$x \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}\,.$$

Vérifier que x n'est pas un décimal et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \neq u_n$. En déduire une contradiction.

Exercice 4. : Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si la proposition suivante est vérifiée par la partie I :

$$\forall (x; y) \in I^2\,;\ x < y\,,\ [x; y] \ \subset \ I\,.$$

Ici $[x; y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I. On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).
On va montrer que I est d'un des types suivants : $]\inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $]\inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Vérifier que, pour $(a;b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$. $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$ et $[a;b]$ sont des intervalles (quand ils sont non vides).
2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition $(\inf I < x < \sup I)$ soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\inf I < x_0 < \sup I$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ avec $\inf I < x < \sup I$ alors il existe $(y;z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $]\inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $]\inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $]\inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.

Exercice 5. : On **admet** que l'intervalle $[0;1[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. (Voir exercice 3). Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. On pose $a = \inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose $a = -\infty$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
2. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$. Trouver une bijection $g :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
3. On suppose $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. Trouver une bijection $h :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
4. On suppose $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Trouver une bijection $k :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$.
5. On considère tous les cas où $a < b$. Montrer qu'il existe une injection $\ell : [0;1[\longrightarrow]a;b[$.
6. On considère tous les cas où $a < b$. Montrer que I est infini et non dénombrable. (Indication : on pourra procéder par l'absurde en supposant que I est au plus dénombrable et utiliser l'injection ℓ.)

Lorsque $a = b$, $a \in \mathbb{R}$ et I est un singleton, d'après l'exercice 4. On a montré que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont non dénombrables. Ils sont soit finis soit infinis non dénombrables. En particulier, $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Exercice 6. : On rappelle que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in A$. On dit que a est isolé dans A s'il existe $\delta > 0$ tel que $]a-\delta; a+\delta[\cap A = \{a\}$. A est dite discrète si tous ses éléments sont isolés dans A.
Soit D une partie discrète de $\mathbb{R}$. On montre qu'elle est au plus dénombrable.

1. Soit $d \in D$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ et $r_q > 0$ tel que $]q - r_q; q + r_q[\cap D = \{d\}$. On considère l'ensemble suivant
$$\mathbb{Q}_D = \Big\{ q \in \mathbb{Q}\,;\ \exists r > 0\,;\ ]q-r; q+r[\cap D \text{ a exactement un élément} \Big\}.$$
2. Montrer que
$$D \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}_D}]q - r_q; q + r_q[\cap D\,.$$
3. En déduire que D est au plus dénombrable.