Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
MEEF 1.

Complément : Ensemble diadique.

On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A \;=\; \left\{k \cdot 2^{-n} \,;\; n \in \mathbb{N}\,,\, k \in [0; 2^n] \cap \mathbb{N}\right\},$$

et la suite réelle $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $w(0) = 0$ et, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$w_p \;=\; 2 \;-\; p \cdot \exp\left(-E\left(\frac{\ln p}{\ln 2}\right) \cdot \ln 2\right), \qquad (1)$$

où exp désigne la fonction exponentielle réelle et E la fonction partie entière.

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'intérieur $\mathring{A}$, l'adhérence $\bar{A}$ et l'ensemble A' des points d'accumulation de A, ainsi que l'ensemble $\mathcal{VA}(w)$ des valeurs d'adhérence et les limites inférieure et supérieure de la suite w.
On pourra utiliser sans justification les faits suivants : $A' \subset \bar{A}$; la suite $(2^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$; la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leq x < E(x) + 1$ et, pour $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) = x$; $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $A \subset [0; 1]$.
2. Vérifier que la suite $(2^{-p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante d'éléments de A qui converge vers 0.
3. Donner une suite strictement croissante d'éléments de A qui converge vers 1.
4. Soit $x \in [0; 1]$. On considère la suite réelle $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $u_p = 2^{-p}E(2^p x)$.
   a). Montrer que u est une suite d'éléments de A vérifiant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - u_p < 2^{-p}$. En déduire que u converge vers x.
   b). On suppose que $x \in A$. Montrer que, dans ce cas, la suite u est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).
5. Déduire des questions précédentes que $\bar{A} = [0; 1]$.
6. Montrer que $A' = \bar{A}$.
7. Déterminer $\mathring{A}$.
8. Montrer que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $w_p = (2^{n+1} - p) \cdot 2^{-n}$, où

$$n \;=\; E\left(\frac{\ln p}{\ln 2}\right). \qquad (2)$$

   Vérifier que $2^n \leq p \leq 2^{n+1} - 1$.
9. On pose

$$w(\mathbb{N}) \;=\; \{w_p \,;\; p \in \mathbb{N}\}.$$

   Montrer que $w(\mathbb{N}) = A$.
10. Déterminer $\mathcal{VA}(w)$, $\liminf w$ et $\limsup w$.

1. (1 pt). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0; 2^n] \cap \mathbb{N}$, $0 \leq k \cdot 2^{-n} \leq 2^n \cdot 2^{-n} = 1$. Donc $k \cdot 2^{-n} \in [0; 1]$. Ceci étant vrai pour tout n et tout k, $A \subset [0; 1]$.
2. (1,5 pts). On sait que la suite $(2^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et l'application $0 < x \mapsto x^{-1}$ est strictement décroissante, donc la suite $(2^{-p})_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, comme $\lim 2^p = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^{-1} = 0$, la suite $(2^{-p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, par composition. Enfin, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $1 \in [0; 2^p] \cap \mathbb{N}$ donc $2^{-p} \in A$.
3. (1,5 pts). On considère la suite $v = (v_p)_{p \in \mathbb{N}}$ donnée par $v_p = 1 - 2^{-p}$. D'après 2., v est strictement croissante et tend vers 1. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, on a $2^p - 1 \in [0; 2^p] \cap \mathbb{N}$ donc $v_p = (2^p - 1) \cdot 2^{-p} \in A$.
4. a). (1,5 pt). D'après la propriété vérifiée par la fonction partie entière E, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $E(2^p x) \leq 2^p x < E(2^p x) + 1$ donc $u_p \leq 2^{-p} \cdot 2^p x = x$ et $x = 2^{-p} \cdot 2^p x < u_p + 2^{-p}$. D'où, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq x - u_p < 2^{-p}$. Par 1., $\lim 2^{-p} = 0$ donc, par le théorème des gendarmes, u converge vers x. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a vu que $0 \leq 2^p x < E(2^p x) + 1$ donc $E(2^p x) \in \mathbb{N}$, et que $E(2^p x) \leq 2^p x \leq 2^p$. Donc $E(2^p x) \in [0; 2^p] \cap \mathbb{N}$, d'où $u_p \in A$.
   b). (1 pt). Comme $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0; 2^n] \cap \mathbb{N}$ tels que $x = k \cdot 2^{-n}$. Pour $p \geq n$, $2^p \cdot k \cdot 2^{-n} = k \cdot 2^{p-n}$ est un entier donc $u_p = 2^{-p} E(2^p \cdot k \cdot 2^{-n}) = 2^{-p} \cdot 2^p \cdot k \cdot 2^{-n} = k \cdot 2^{-n} = x$. u est donc stationnaire.
5. (1,5 pts). Comme $[0; 1]$ est un intervalle fermé (cf. cours) et $A \subset [0; 1]$ par 1., $\bar{A} \subset [0; 1]$. Soit $x \in [0; 1]$. D'après 4. a)., x est limite d'une suite d'éléments de A donc, par le cours, $x \in \bar{A}$. D'où $[0; 1] \subset \bar{A}$. On a donc $\bar{A} = [0; 1]$.
6. (3 pts). On sait que $A' \subset \bar{A}$. Soit $x \in \bar{A} \setminus A$. Par le cours, x est un point d'accumulation de A donc $x \in A'$. Soit $x \in A$. On montre que x est la limite d'une suite strictement monotone d'éléments de A.
   C'est vrai pour $x = 0$ par 2. C'est vrai pour $x = 1$ par 3. Prenons maintenant $x \in A \setminus \{0; 1\}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in]0; 2^n[\cap \mathbb{N}$, tel que $x = k \cdot 2^{-n}$. La suite $z = (z_p)_{p \geq n}$ définie par $z_p = x + 2^{-p}$ est strictement décroissante et converge vers x par 2. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire $z_p = (k \cdot 2^{p-n} + 1) \cdot 2^{-p}$ avec $0 \leq k \cdot 2^{p-n} + 1 < 2^n \cdot 2^{p-n} + 1 = 2^p + 1$ et $k \cdot 2^{p-n} + 1 \in \mathbb{N}$. Donc $k \cdot 2^{p-n} + 1 \in [0; 2^p] \cap \mathbb{N}$ et $z_p \in A$.
   Soit z une suite strictement monotone d'éléments de A qui converge vers x. Soit $V \in \mathcal{V}_x$. Comme z converge vers x, V contient tous les termes de z à partir d'un certain rang. Comme z est strictement monotone, ces termes sont 2 à 2 distincts et V contient une infinité de terme de la suite donc une infinité d'éléments de A. Par le cours, x est un point d'accumulation de A et $x \in A'$. On a montré que $\bar{A} \subset A'$.
   Conclusion : $A' = \bar{A}$.
7. (1,5 pts). On remarque d'abord que les éléments de A sont des rationnels. Donc $A \subset \mathbb{Q}$. On suppose que A est d'intérieur non vide. Il existe donc un ouvert non vide U inclu dans A. Soit $x \in U$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, x appartient à

l'adhérence de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe donc un irrationnel y appartenant au voisinage U de x. D'où $y \in A$. Contradiction puisque $A \subset \mathbb{Q}$. Donc $\mathring{A} = \emptyset$.

8. (1,5 pts). Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit n donné par la formule (2). On a

$$\frac{2^{n+1} - p}{2^n} = 2 - p \cdot 2^{-n} = 2 - p \cdot \exp(-n \ln 2) = w_p$$

d'après (1). De plus, par (2),

$$n = E\Big(\frac{\ln p}{\ln 2}\Big) \leq \frac{\ln p}{\ln 2} < E\Big(\frac{\ln p}{\ln 2}\Big) + 1 = n + 1$$

et $n \ln 2 \leq \ln p < (n+1) \ln 2$, puisque $\ln 2 > 0$. Comme l'exponentielle est strictement croissante, $2^n \leq p < 2^{n+1}$. Comme p est un entier, $2^n \leq p \leq 2^{n+1} - 1$.

9. (1 pt). Comme $w_0 = 0 = 0 \cdot 2^{-0}$ avec $0 \in [0; 2^0] \cap \mathbb{N}$, $w_0 \in A$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et n défini par (2). Posons $k = 2^{n+1} - p$. Par 8., $2^n \leq p \leq 2^{n+1} - 1$ donc $1 \leq k \leq 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$. Par 8., $w_p = k \cdot 2^{-n} \in A$. D'où $w(\mathbb{N}) \subset A$.
Soit $x \in A$. Si $x = 0$, $x = w_0$ donc $x \in w(\mathbb{N})$. Supposons maintenant $x \neq 0$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $k \in]0; 2^n] \cap \mathbb{N}$ tels que $x = k \cdot 2^{-n}$. Posons $p = 2^{n+1} - k$. On a $2^n = 2^n(2-1) = 2^{n+1} - 2^n \leq p \leq 2^{n+1} - 1$. Par 8., $x = w_p$ donc $x \in w(\mathbb{N})$. D'où $A \subset w(\mathbb{N})$.
Conclusion : $w(\mathbb{N}) = A$.

10. (2 pts). Par le cours, tout point d'accumulation de $w(\mathbb{N})$ est une valeur d'adhérence de w donc $A' \subset \mathcal{VA}(w)$. Par 9., $w(\mathbb{N}) = A \subset [0; 1]$. Donc $0 \leq \inf w \leq \sup w \leq 1$. Par le cours, on a donc $0 \leq \inf w \leq \liminf w \leq \limsup w \leq \sup w \leq 1$. Par le cours, $\liminf w = \inf \mathcal{VA}(w)$ et $\limsup w = \sup \mathcal{VA}(w)$ donc $\mathcal{VA}(w) \subset [\liminf w; \limsup w]$. D'où $\mathcal{VA}(w) \subset [0; 1]$. Par 5. et 6., on a donc $[0; 1] = A' \subset \mathcal{VA}(w) \subset [0; 1]$, d'où $\mathcal{VA}(w) = [0; 1]$ et $\liminf w = 0$ et $\limsup w = 1$.