Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
MEEF 1.

Complément : Fonctions plates.

Exercice 1. : On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} \quad \text{si}\, x > 0\,, \\ & & & & 0 \quad \text{si}\, x \leq 0\,. \end{array}$$

On admet le résultat suivant : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I\setminus\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n := \lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (avec $f^{(0)} = f$ et, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f). Alors f admet un prolongement par continuité F en a, F est une fonction de classe C^∞ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(a) = l_n$.

1. Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n, dont on précisera le degré, telle que
$$\forall x > 0\,, \quad g^{(n)}(x) \;=\; P_n\big(1/x\big) \cdot g(x)\,.$$
3. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $g^{(n)}(0)$?
4. Vérifier que g et g' sont positives, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$.
5. Montrer les équivalences
$$\Big(\big(g(x) \;>\; 0\big) \quad\Longleftrightarrow\quad \big(x \;>\; 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) \;>\; 0\big) \Longleftrightarrow \quad \big(x \;>\; 0\big)\Big)\,.$$
6. Montrer que g et la fonction nulle ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.

Exercice 2. : On considère la fonction g de l'exercice 1 et on pourra utiliser sans démonstration les résultats de l'exercice 1. On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) \;=\; g\big(x^2 - 1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) \;=\; g\big(4 - x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.

(c) Établir les deux équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \big(h_1(x) = 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \in [-1;1]\big)\ , \\ \big(h_2(x) = 0\big) & \Longleftrightarrow & \big(x \notin]-2;2[\big)\ . \end{array}$$

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad f(x) = \frac{h_2(x)}{h_2(x) + h_1(x)}\ .$$

(a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

(c) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence

$$\big(f(x) = 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \notin]-2;2[\big)\ .$$

(d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?

(e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$. (Indication : on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g'.)

3. Étant donnés $a > b \geq 0$, donner (sans justification) une fonction F, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

4. Étant donnés $a > b \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$, donner (sans justification) une fonction G, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]c-a;c+a[$, valant 1 sur $[c-b;c+b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq G(x) \leq 1$.

5. Montrer qu'une fonction G du 4 est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. : On note par $\mathbb{1}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application construite au 2 de l'exercice 2.

1. Montrer que $\mathbb{1}$ et f ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.
2. La fonction f est-elle développable en série entière près de 0 ?
3. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(2+x)$ est-elle développable en série entière près de 0 ?

Exercice 4. : Théorème de Borel.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de nombres complexes. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = a_n$. Ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n$ième de f.
On note par χ la fonction f du 2 de l'exercice 2. On se donne une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $\lambda_k > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f_k(x) = \frac{a_k x^k}{k!} \cdot \chi(\lambda_k x)\ .$$

1. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\chi^{(n)}(y) = 0$ si $|y| \leq 1$ ou $|y| \geq 2$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \|\chi^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{y\in\mathbb{R}} \big|\chi^{(n)}(y)\big| \;<\; +\infty\,.$$
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $f_k(x) = 0$ si $|x| \geq 2\lambda_k^{-1}$ et que $f_k(x) = 1$ si $|x| \leq \lambda_k^{-1}$.
3. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ et $g_\ell : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g_\ell(x) = x^\ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée $n$ième de g_ℓ est donnée par
$$g_\ell^{(n)}(x) \;=\; \ell(\ell-1)\cdots(\ell-n+1)\, x^{\ell-n} \;=\; \frac{\ell!}{(\ell-n)!}\, x^{\ell-n}\,.$$
avec la convention que $g_\ell^{(n)}(x) = 0$ si $n > \ell$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $b_n \geq 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k > n$, on ait
$$\|f_k^{(n)}\|_\infty \;:=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|f_k^{(n)}(x)\big| \;\leq\; b_n \cdot 2^k |a_k| \cdot \lambda_k^{n-k}\,.$$
(Indication : on pourra utiliser la formule de Leibnitz pour calculer $f_k^{(n)}$).
5. On choisit $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k = 4^k(|a_k|+1) > 0$. Montrer que, pour tout n, la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k^{(n)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f la somme de la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Vérifier qu'elle est bien définie et que c'est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $f^{(n)}(0) = a_n$.