Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
MEEF 1.

Complément : Convexité et normes.

Exercice 1. : Soit I un intervalle de longueur strictement positive et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}(n)$ suivante : Pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in I$, pour tout $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,.$$

Montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \cdots, x_n) \in I$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $m := \sum_{i=1}^n m_i > 0$, on a

$$f\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i x_i\right) \;\leq\; \frac{1}{m}\sum_{i=1}^n m_i f(x_i)\,.$$

Exercice 2. : On rappelle que, pour $a > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on définit $a^\gamma = e^{\gamma \ln a}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1; \cdots; a_n) \in]0; +\infty[^n$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n a_k^{1/n} \;\leq\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\,.$$

(Indication : on pourra utiliser la concavité du logarithme et l'exercice 1.)
Remarque : On constate que l'inégalité précédente est encore vraie si les a_k sont positifs ou nuls en posant par convention que $0^{1/n} = 0$. Le membre de gauche de l'inégalité est appelé moyenne géométrique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. Le membre de droite est appelé moyenne arithmétique des nombres $a_1, \cdots, a_n$. L'exercice montre donc que la moyenne arithmétique est toujours plus grande que la moyenne géométrique.

Exercice 3. : Dans tout l'exercice, on considère deux réels $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Pour $t > 0$, soit $f_t : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ définie par $f_t(0) = 0$ et, pour $x > 0$, $f_t(x) = x^t = e^{t \ln x}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in [0; +\infty[^n$ et $(m_1, \cdots, m_n) \in [0; +\infty[^n$ tel que $\sum_{i=1}^n m_i = 1$. Soit $\mu :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(t) \;=\; f_{1/t}\left(\sum_{i=1}^n m_i f_t(x_i)\right)\,.$$

1. Soit $t > 0$. Montrer que f_t est croissante. Vérifier que, si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $f_t(xy) = f_t(x) f_t(y)$.
   On remarque que $f_t \circ f_{1/t} = f_{1/t} \circ f_t = id$, où $id : [0; +\infty[\longrightarrow [0; +\infty[$ est définie par $id(x) = x$.

2. Soit $t > 1$. Montrer que la restriction de f_t à $]0;+\infty[$ est convexe. Montrer que f_t est convexe.
3. Soit $t > 1$. En utilisant l'exercice 1, montrer que $\mu(t) \geq \mu(1)$.
4. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$. Soit

$$\lambda \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q} \;>\; 0\,.$$

On choisit, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $m_i = \lambda^{-q}|b_i|^q > 0$ et $x_i = m_i^{-1/p}|a_i| \geq 0$. Vérifier que $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$. Montrer (avec 3.) l'inégalité suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \;\leq\; f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}. \tag{1}$$

5. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. L'inégalité (2) ci-dessous est vraie si, pour tout $i \in \{1; \cdots, n\}$, $b_i = 0$. On suppose que les b_i ne sont pas tous nuls. On note les termes non nuls $b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}$ avec $k \geq 1$. En appliquant l'inégalité (1), avec n remplacé par k, à des k-uples appropriés, montrer l'inégalité de Hölder suivante :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \;\leq\; f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) \cdot f_{1/q}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_q\big(|b_i|\big)\right). \tag{2}$$

6. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Appliquer l'inégalité (2) avec les a_i replacés par $|a_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. Appliquer cette même inégalité avec les a_i remplacés par les $|b_i|$ et les b_i remplacés par les $f_{p-1}(|a_i + b_i|)$. En déduire l'inégalité de Minkowski suivante :

$$f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i + b_i|\big)\right) \;\leq\; f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|a_i|\big)\right) + f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|b_i|\big)\right). \tag{3}$$

7. Montrer que l'application $N_{n;p} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, par

$$N_{n;p}(y) \;=\; f_{1/p}\!\left(\sum_{i=1}^{n} f_p\big(|y_i|\big)\right),$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

8. Montrer que l'inégalité de Hölder (2) est encore valable en remplaçant p par 1 et le facteur dépendant de q par

$$\sup_{1 \leq i \leq n} |b_i|\,.$$

9. Montrer directement (sans passer par l'inégalité de Hölder comme au 6.) que l'inégalité de Minkowski (3) est encore valable lorsque p est remplacé par 1.

10. En déduire que les applications $N_{n;1}, N_{n;\infty} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définies, pour $y = (y_1, \cdots, y_n)$, respectivement par

$$N_{n;1}(y) \; = \; \sum_{i=1}^{n} |y_i| \quad \text{et} \quad N_{n;\infty}(y) \; = \; \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i| \, ,$$

sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

11. Soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big) \; < \; +\infty \, .$$

Montrer que ℓ^p est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_p : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_p(a) \; = \; f_{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_p\big(|a_i|\big) \right) ,$$

est une norme sur ℓ^p.

12. Soit ℓ^1 l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \; < \; +\infty \, .$$

Montrer que ℓ^1 est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_1 : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_1(a) \; = \; \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \, ,$$

est une norme sur ℓ^1.

13. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \; < \; +\infty \, .$$

Montrer que ℓ^∞ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'application $N_\infty : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, par

$$N_\infty(a) \; = \; \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i| \, ,$$

est une norme sur ℓ^∞.