Université de Cergy-Pontoise **2017-2018**
MEEF 1.

Complément : ensemble triadique de Cantor.

Exercice 1. : Soit S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$, $a_n = 1$ ou $a_n = 2$. Soit F le sous-ensemble de S formé des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0$ ou $a_n = 2$. Soit $\sigma : S \longrightarrow [0; 1]$ définie par

$$\sigma(a) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \ . \tag{1}$$

On note par E la fonction partie entière. On note par $\mathcal{C} = \sigma(F)$, l'image de F par σ. L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé ensemble triadique de Cantor.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère le sous-ensemble G_p de S formé des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $a_n \in \{0; 2\}$, si $n < p$, $a_p = 1$, et $a_n = 0$, si $n > p$. Pour $a \in G_p$, on pose $I(a) =]\sigma(a); \sigma(a) + 3^{-p}[$. On remarque que $G_p \cap F = \emptyset$ et que $|G_p|$, le cardinal de G_p, est 2^{p-1}.

1. Vérifier que σ est bien définie, c'est-à-dire que la série dans (1) est convergente et que sa somme appartient à $[0; 1]$. Montrer que $0 \in \mathcal{C}$ et $1 \in \mathcal{C}$. Montrer que $1/3$ a deux antécédents par σ. En particulier, σ n'est pas injective.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. Montrer que
$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} \ \leq \ \frac{1}{3^p} \ . \tag{2}$$
On suppose maintenant qu'il existe $n \geq p + 1$ tel que $t_n \neq 2$. Soit k le plus petit entier n vérifiant cette propriété. Montrer que
$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} \ \leq \ \frac{1}{3^p} \ - \ \frac{1}{3^k} \ . \tag{3}$$
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. Montrer que (2) est une égalité si et seulement si, pour $n \geq p + 1$, $t_n = 2$.
4. Pour $(s, t) \in S^2$ tel que $s \neq t$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On note $s \prec t$ si $s_k < t_k$. Montrer que, si $s \prec t$, alors $\sigma(s) \leq \sigma(t)$. Montrer que, si $\sigma(s) < \sigma(t)$, alors $s \prec t$. Montrer que l'implication
$$s \prec t \ \Longrightarrow \sigma(s) \ < \ \sigma(t)$$
est fausse. On suppose que pour un $p \in \mathbb{N}^*$ et un $p' \in \mathbb{N}^*$, $s \in G_p$ et $t \in G_{p'}$. Montrer alors que
$$s \prec t \ \Longleftrightarrow \sigma(s) \ < \ \sigma(t) \ .$$

5. Soit $x \in [0;1[$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = E(3x)$ et, pour $k > 1$,
$$a_k \;=\; E\biggl(3^k\Bigl(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n}\Bigr)\biggr)\,.$$
Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, la propriété
$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\quad \mathcal{P}(k) \;=\; \biggl(a_k \in \{0;1;2\} \quad \text{et} \quad 3^k\Bigl(x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{3^n}\Bigr) \;\in\; [0;1[\biggr)\,.$$
En déduire que $a \in S$ et que $x = \sigma(a)$. Montrer que σ est surjective.
6. Soit $(s,t) \in S^2$ tel que $s \neq t$ et $\sigma(s) = \sigma(t)$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On a donc $s_k \neq t_k$. Par exemple, $s_k < t_k$. Montrer que $t_k = s_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 2$ et $t_n = 0$.
7. Soit $(s,t) \in S^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour $1 \leq n < k$, $s_n = t_n$, $t_k = s_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 2$ et $t_n = 0$. Montrer que $s \neq t$ et $\sigma(s) = \sigma(t)$.
8. Montrer que la restriction $\sigma_{|F}$ de σ à F est injective. Montrer que F est un ensemble infini. En particulier, $\sigma_{|F}$ est bijective de F sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est un ensemble infini.
9. Soit $x = \sigma(b) \in \mathcal{C}$ avec $b \in F$. Soit $\delta > 0$. Montrer qu'il existe $c \in F$ telle que $y = \sigma(c) \in]x-\delta; x+\delta[\setminus\{x\}$. (Indication : on pourra construire c en modifiant b à partir d'un rang p tel que $3^{-p+1} < \delta$). Montrer qu'il existe $d \in S \setminus F$ telle que $z = \sigma(d) \in]x-\delta; x+\delta[$ et $z \notin \mathcal{C}$.
10. On étudie les intervalles $I(a)$ pour $a \in G_p$ et $p \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que, si $p \neq p'$ dans $\mathbb{N}$, alors $G_p \cap G_{p'} = \emptyset$. Déterminer G_1, G_2 et G_3.
   b). Soit $a \in G_p$. Montrer que $\sigma(a) + 3^{-p} \in \mathcal{C}$. Montrer que $\sigma(a) \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in F$ telle que $\sigma(a) = \sigma(b)$. En déduire que $I(a) \subset [0;1]$. Montrer que, pour $t \in F$, $\sigma(t) \notin I(a)$.
   c). Soit $b \in S$ tel que $\sigma(b) \notin \mathcal{C}$. Nécessairement, $b \notin F$. Soit p le plus petit entier $n > 0$ tel que $b_n \notin \{0;2\}$. Soit $a \in S$ définie par $a_n = b_n$, si $n \leq p$, et $a_n = 0$, sinon. Vérifier que $a \in G_p$. Montrer que $\sigma(b) \in I(a)$.
   d). Soit $a \in G_p$ et $b \in S$ tel que $\sigma(b) \in I(a)$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq b_n$. (Indication : on pourra utiliser 4.). Soit k le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq b_n$. Montrer que $k \geq p$. (Indication : on pourra utiliser 4.). En déduire que $b_p = a_p = 1$ et $k > p$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N} \cap]p; +\infty[$ tel que $b_n \neq 2$.
   e). Soit $a \in G_p$ et $a' \in G_{p'}$ telles que $a \prec a'$. Soit k le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \neq a'_n$. Montrer que
$$\sigma(a) + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{3^{\max(p;p')}} \;\leq\; \sigma(a')\,. \tag{4}$$
   Montrer qu'on a égalité dans (4) si et seulement si
$$\bigl(k = p < p'\bigr) \text{ et } \bigl(a'_{k+1} = \cdots = a'_{p'-1} = 0\bigr)$$
   ou
$$\bigl(k = p' < p\bigr) \text{ et } \bigl(a_{k+1} = \cdots = a_{p-1} = 2\bigr)\,.$$
   En déduire que $I(a) \cap I(a') = \emptyset$.

f). Pour $P \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\mathcal{O}_P \;=\; \bigcup_{p=1}^{P} \bigcup_{a\in G_p} I(a) \quad \text{et} \quad \mathcal{O} \;=\; \bigcup_{P\in\mathbb{N}^*} \mathcal{O}_P \;\subset [0;1]\,.$$

Montrer que $\mathcal{O}_P$ est la réunion de 2^P-1 intervalles ouverts deux à deux disjoints. Calculer L_P, la longueur totale de $\mathcal{O}_P$. Montrer que la suite $(L_P)_{P\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. $\mathcal{O}$ contient donc des ensembles dont la longueur totale s'approche de 1 aussi près que l'on veut.

g). Montrer que $(\mathcal{O},\mathcal{C})$ forme une partition de $[0;1]$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}\cap\mathcal{C}=\emptyset$ et $\mathcal{O}\cup\mathcal{C}=[0;1]$, ou, de manière équivalente, que $\mathcal{O}=[0;1]\setminus\mathcal{C}$, le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans $[0;1]$.

11. Montrer que $\mathcal{C}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathcal{C}$ est compact.
12. Montrer que $\mathcal{C}$ est constitué de points d'accumulation de $\mathcal{C}$. Montrer que l'intérieur de $\mathcal{C}$ est vide.

Exercice 2. : Soit $f_0, f_1 : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ définies par $f_0(x)=x/3$ et $f_1(x)=2/3+x/3$. On remarque que f_0 et f_1 sont continues et strictement croissantes donc injectives. On définit par récurrence sur $p\in\mathbb{N}$, une famille $\{J_{p;k}; p\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]\}$ de sous-intervalles de $[0;1]$ de la façon suivante : $J_{0;0}=[0;1]$ et, pour $p\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$,

$$J_{p+1;2k} \;=\; f_0\big(J_{p;k}\big) \quad \text{et} \quad J_{p+1;2k+1} \;=\; f_1\big(J_{p;k}\big)\,.$$

Pour un intervalle I, $L(I)$ désigne sa longueur. Pour $j\in\{0;1\}$, $f_j(I)=\{f_j(x); x\in I\}$ est l'image directe de I par f_j. **On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant** : Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{R}$ (pour tout n, $K_{n+1}\subset K_n$). Alors

$$K \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

est non vide.

1. Montrer que $f_0([0;1])=[0;1/3]$ et $f_1([0;1])=[2/3;1]$. On note que les images de f_0 et f_1 sont disjointes.
2. Pour $p\in\{0;1;2;3\}$, placer les intervalles $J_{p;k}$ dans un dessin représentant l'intervalle $[0;1]$.
3. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on considère $\mathcal{P}(p)$ la proposition suivante : Pour tout $k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$, $J_{p;k}$ est un sous-intervalle compact de $[0;1]$ de longueur $L(J_{p;k})=3^{-p}$. Pour tout $k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$, il existe $k'\in\mathbb{N}\cap[0;2^{p-1}-1]$ tel que $J_{p;k}\subset J_{p-1;k'}$. Pour $k\neq k'$ dans $\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$, $J_{p;k}\cap J_{p;k'}=\emptyset$.
   a). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   b). Montrer que la proposition est héréditaire.
   Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.
4. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}\cap[0;2^p-1]$. Montrer qu'il existe au plus deux intervalles du type $J_{p+1;k'}$ qui sont inclus dans $J_{p;k}$. (Indication : on pourra utiliser la longueur des intervalles).

5. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer qu'il existe exactement deux intervalles du type $J_{p+1;k'}$ qui sont inclus dans $J_{p;k}$. (Indication : on pourra utiliser le nombre d'intervalles dans une génération).
6. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit
$$C_p = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]} J_{p;k} \,.$$
Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, C_p est un compact non vide et que $C_{p+1} \subset C_p$.
7. Soit
$$C = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} C_p \,.$$
Montrer que C est un compact non vide.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N} \cap [0; n]$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, il existe $k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^n - 1]$ tel que $J_{n;k'} \subset J_{p;k}$. (Indication : on pourra faire une récurrence descendante sur p.) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N} \cap [n; +\infty[$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, il existe $k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^n - 1]$ tel que $J_{p;k} \subset J_{n;k'}$.
En particulier, on a montré que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, $J_{p;k} \cap C_n \neq \emptyset$.
9. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer que $C \cap J_{p;k} \neq \emptyset$.
10. Soit $x \in C$. Par définition de C, il existe une suite $(k_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \in J_{p;k_p}$. Soit $\delta > 0$.
a). Soit $P \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-P} < \delta$. Montrer que, pour $p \geq P$, $J_{p;k_p} \subset]x - \delta; x + \delta[$.
b). Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^q - 1]$ tels que $J_{q;k} \subset]x - \delta; x + \delta[\setminus \{x\}$.
11. Montrer que C est d'intérieur vide. (Indication : pour $\delta > 0$ et $x \in C$, montrer qu'il existe p assez grand tel que $]x - \delta; x + \delta[$ n'est pas inclu dans C_p).
12. Montrer que tout point de C est un point d'accumulation de C.

Exercice 3. : Dans cet exercice, on montre que l'ensemble triadique de Cantor $\mathcal{C}$ de l'exercice 1 est le même que l'ensemble C de l'exercice 2. On établit quelques résultats préliminaires avant de prouver l'égalité des deux ensembles.

Pour deux parties A et B de $[0; 1]$, on dit que A *est à gauche de* B, on note $A \ll B$ si $\sup A \leq \inf B$ et $A \cap B = \emptyset$. On dit que A *est collée à gauche de* B, on note $A <_c B$ si $\sup A = \inf B$ et $A \cap B = \emptyset$. On remarque que

$$(*) \qquad A <_c B \iff \big(A \ll B \quad \text{et} \quad \sup A = \inf B\big) \,.$$

L'ensemble S étant celui de l'exercice 1, on définit deux applications $\varphi_0, \varphi_1 : S \longrightarrow S$ par, pour $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in S$, $\varphi_0(a) = {}_0a$ et $\varphi_1(a) = {}_1a$ où ${}_0a_1 = 0$, ${}_1a_1 = 2$, et, pour $n \geq 2$, ${}_0a_n = {}_1a_n = a_{n-1}$. φ_0 et φ_1 décallent donc une suite a vers la droite et fixent le premier terme à 0, respectivement à 2.

1. Soit A et B deux parties de $[0; 1]$. Montrer que, si $A \ll B$, alors
$$\big(f_0(A) \ll f_0(B)\big) \text{ et } \big(f_1(A) \ll f_1(B)\big) \text{ et } \big(f_0(A) \ll f_1(B)\big) \text{ et } \big(f_0(B) \ll f_1(A)\big) \,.$$
Montrer que, si $A <_c B$, alors $f_0(A) <_c f_0(B)$ et $f_1(A) <_c f_1(B)$.

2. Pour $a \in S$, montrer que $f_0(\sigma(a)) = \sigma(\varphi_0(a))$ et $f_1(\sigma(a)) = \sigma(\varphi_1(a))$. (L'application σ est celle de l'exercice 1.)
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Vérifier que l'ensemble G_p (défini dans l'exercice 1) est l'union disjointe de ${}_0G_p := \{a \in G_p; a_0 = 0\}$ et ${}_1G_p := \{a \in G_p; a_0 = 2\}$. On note par $\underline{a}$ l'unique élément de G_1. Vérifier que $I(\underline{a}) =]1/3; 2/3[$.
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi_0(G_p) = {}_0G_{p+1}$ et $\varphi_1(G_p) = {}_1G_{p+1}$.
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et une suite $a \in G_p$. Montrer que

   $$f_0(\sigma(a) + 3^{-p}) = \sigma(\varphi_0(a)) + 3^{-(p+1)}, \quad f_1(\sigma(a) + 3^{-p}) = \sigma(\varphi_1(a)) + 3^{-(p+1)}.$$

   En déduire que $f_0(I(a)) = I(\varphi_0(a))$ et $f_1(I(a)) = I(\varphi_1(a))$. (Les intervalles ouverts $I(a)$ sont définis dans l'exercice 1.)
6. Dans l'exercice 2, on a introduit les intervalles compacts $J_{p;k}$, pour $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. On va montrer, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(p)$ suivante :

   $i)_p$. Pour $k, k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $J_{p;k} \ll J_{p;k'}$ et tels que, pour tout $\ell \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, la proposition

   $$\big(J_{p;k} \ll J_{p;\ell} \quad \text{et} \quad J_{p;\ell} \ll J_{p;k'}\big) \tag{5}$$

   soit fausse, il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $a \in G_r$ tels que $J_{p;k} <_c I(a) <_c J_{p;k'}$.

   $ii)_p$. Pour tout $r, r' \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et tous $a \in G_r$ et $a' \in G_{r'}$ tels que $I(a) \ll I(a')$ et tels que, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $b \in G_s$, la proposition

   $$\big(I(a) \ll I(b) \quad \text{et} \quad I(b) \ll I(a')\big) \tag{6}$$

   soit fausse, il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $I(a) <_c J_{p;k} <_c I(a')$.

   $iii)_p$. Il existe $k, k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $0 \in J_{p;k}$ et $1 \in J_{p;k'}$.

   a). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

   b). On suppose $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. On considère deux intervalles $J_{p+1;k}$ et $J_{p+1;k'}$ pour lesquels la proposition (5) avec p replacé par $p+1$ soit fausse, pour tout $\ell \in \mathbb{N} \cap [0; 2^{p+1} - 1]$. Montrer que $J_{p+1;k} \ll I(a) \ll J_{p+1;k'}$ pour un $a \in G_1$, ou bien les deux intervalles sont inclus dans $J_{1;0} = [0; 1/3]$, ou bien les deux intervalles sont inclus dans $J_{1;1} = [2/3; 1]$.

   c). Dans le cadre du 6.b), on suppose que $J_{p+1;k} \ll I(a) \ll J_{p+1;k'}$, pour $a \in G_1$. Montrer qu'il existe k_1, k_1' dans $N \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $J_{p+1;k} = f_0(J_{p,k_1})$, $J_{p+1;k'} = f_1(J_{p,k_1'})$, $1 \in J_{p,k_1}$ et $0 \in J_{p,k_1'}$. En déduire que $J_{p+1;k} <_c I(a) <_c J_{p+1;k'}$.

   d). Dans le cadre du 6.b), on suppose que $J_{p+1;k} \subset f_\epsilon([0; 1])$ et $J_{p+1;k'} \subset f_\epsilon([0; 1])$, pour un $\epsilon \in \{0; 1\}$. Montrer qu'il existe k_1 et k_1' dans $\mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tels que $J_{p+1;k} = f_\epsilon(J_{p;k_1})$ et $J_{p+1;k'} = f_\epsilon(J_{p;k_1'})$ et tels que la proposition (5) soit fausse pour $J_{p;k_1}$ et $J_{p;k_1'}$, quel que soit $\ell \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $a \in G_r$ tels que $I_{p+1;k} <_c I(a) <_c I_{p+1;k'}$.

   e). On suppose toujours $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Soit $r \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $a \in G_r$ tels que, ou bien la proposition (6) est fausse pour $I(a)$ et $I(\underline{a})$ et tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $b \in G_s$, ou bien la proposition (6) est fausse pour $I(\underline{a})$ et $I(a)$ et tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $b \in G_s$. Montrer que $r = p+1$. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $I(a) <_c J_{p+1;k} <_c I(\underline{a})$ ou $I(\underline{a}) <_c J_{p+1;k} <_c I(a)$.

f). On suppose toujours $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Soit $r, r' \in \mathbb{N} \cap]1; p+1]$, $a \in G_r$ et $a' \in G_{r'}$ tels que la proposition (6) soit fausse pour $I(a)$ et $I(a')$ et pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p+1]$ et $b \in G_s$. Montrer que $r = p+1$ ou $r' = p+1$. Montrer qu'il existe $\epsilon \in \{0; 1\}$, $a_1 \in G_{r-1}$ et $a'_1 \in G_{r'-1}$ tels que $f_\epsilon(I(a_1)) = I(a)$ et $f_\epsilon(I(a'_1)) = I(a')$. En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^{p+1} - 1]$ tel que $I(a) <_c J_{p+1;k} <_c I(a')$.

g). On suppose toujours $\mathcal{P}(p)$ vraie, pour un $p \geq 2$. Montrer qu'il existe $k, k' \in \mathbb{N} \cap [0; 2^{p+1} - 1]$ tels que $0 \in J_{p+1;k}$ et $1 \in J_{p+1;k'}$.

On a donc montré par récurrence que $\mathcal{P}(p)$ vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$, $a \in G_r$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$. Montrer que $I(a) \cap J_{p;k} = \emptyset$. Montrer qu'il existe un unique $b \in G_{p+1}$ tel que $I(b) \subset J_{p;k}$.
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $0 \in J_{p;k}$ (resp. $1 \in J_{p;k}$). Montrer que $k = 0$ (resp. $k = 2^p - 1$) et qu'il existe $a \in G_p$ tel que $J_{p;k} = [0; \sigma(a)]$ (resp. $J_{p;k} = [\sigma(a) + 3^{-p}; 1]$).
9. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in G_p$ tels que la proposition
$$\big(I(b) \ll I(a)\big)$$
soit fausse, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $b \in G_s$. Montrer que $J_{p;0} <_c I(a)$. Soit $a' \in G_p$ tel que la proposition
$$\big(I(a') \ll I(b)\big)$$
soit fausse, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $b \in G_s$. Montrer que $I(a') <_c J_{p;2^p-1}$.
10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a \in G_{p+1}$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$ tel que $I(a) \subset J_{p;k}$.
11. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [0; 1]$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cap [0; 2^p - 1]$, $x \notin J_{p;k}$. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N} \cap [1; p]$ et $a \in G_r$ tels que $x \in I(a)$.
12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathcal{O}_p$ est défini dans le 8. f) de l'exercice 1 et que C_p est défini dans le 6 de l'exercice 2. Montrer que $(\mathcal{O}_p, C_p)$ forme une partition de $[0; 1]$, c'est-à-dire que $\mathcal{O}_p \cap C_p = \emptyset$ et $\mathcal{O}_p \cup C_p = [0; 1]$, ou, de manière équivalente, que $\mathcal{O}_p = [0; 1] \setminus C_p$, le complémentaire de C_p dans $[0; 1]$.
13. En déduire que $C = \mathcal{C}$.

Exercice 4. : Escalier de Cantor.
L'objectif de cet exercice est de construire une fonction continue croissante $g : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ telle que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, g est dérivable de dérivée nulle sur $\mathbb{R} \setminus C$, où C est l'ensemble triadique de Cantor des exercices 1, 2 et 3. On rappelle que C est une partie compacte de $[0; 1]$ d'intérieur vide et que l'ensemble $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus C$ est une réunion infinie d'intervalles ouverts et disjoints dont la "longueur totale" est 1.
On utilise les notations et les résultats de ces exercices 1, 2 et 3.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $a \in G_p$, on décide que la restriction de g à l'intervalle $I(a)$ est constante égale à un certain $c_a \in [0; 1]$ (que l'on choisira soigneusement plus loin). Il reste à définir g sur C. On pose
$$g(0) \;=\; \inf_{y \in \mathcal{O}} g(y) \,, \quad g(1) \;=\; \sup_{y \in \mathcal{O}} g(y) \,,$$

et, pour $x \in C \setminus \{0;1\}$,

$$g(x) \;=\; 2^{-1} \cdot \left(\inf_{\substack{y \in \mathcal{O} \\ y > x}} g(y) \;+\; \sup_{\substack{y \in \mathcal{O} \\ y < x}} g(y) \right) .$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on construit une application réelle g_p sur $[0;1]$ de la façon suivante. Pour $r \in \mathbb{N} \cap [1;p]$, pour $a \in G_r$, la restriction de g_p à l'intervalle $I(a)$ est constante égale à c_a. Sur l'intervalle $J_{p;0}$, qui vaut $[0;\sigma(a)]$ pour un $a \in G_p$ (cf. 8 de l'exercice 3), on pose $g_p(x) = c_a(\sigma(a))^{-1}x$. Sur l'intervalle $I_{p;2^p-1}$, qui vaut $[\sigma(a') + 3^{-p};1]$ pour un $a' \in G_p$ (cf. 8 de l'exercice 3), on pose

$$g_p(x) \;=\; 1 \;+\; \frac{c_{a'} - 1}{\sigma(a') + 3^{-p} - 1} \cdot (x-1)\,.$$

Enfin, pour $k \in \mathbb{N} \cap]0;2^p-1[$, on sait, d'après le 6, $i)_p$ de l'exercice 3 et le 10, e) de l'exercice 1, que l'intervalle $J_{p;k}$ s'écrit $[\sigma(a) + 3^{-r};\sigma(a')]$, pour un $a \in G_r$, un $a' \in G_{r'}$, un $(r,r') \in (\mathbb{N} \cap [1;p])^2$ avec $p = \max(r;r')$. On pose, pour $x \in J_{p;k}$,

$$g_p(x) \;=\; c_a \;+\; \frac{c_{a'} - c_a}{\sigma(a') - \sigma(a) - 3^{-r}} \cdot \big(x - \sigma(a) - 3^{-r}\big)\,.$$

1. Pour $p \in \{1;2;3\}$, donner explicitement les intervalles ouverts $I(a)$, pour $a \in G_r$ et $r \in \mathbb{N} \cap [1;p]$, et les intervalles fermés $J_{p;k}$, $k \in \mathbb{N} \cap [0;2^p-1]$.
2. Choix des constantes c_a. On les construit par récurrence de la façon suivante. On pose $c_{\underline{a}} = 1/2$. Étant donné $p \in \mathbb{N}^*$, supposons construits c_b pour tout $b \in G_r$ et tout $r \in \mathbb{N} \cap [1;p]$. Soit $a \in G_{p+1}$. D'après le 10 de l'exercice 3, il existe $k \in \mathbb{N} \cap [0;2^p-1]$ tel que $I(a) \subset J_{p;k}$. D'après la proposition $\mathcal{P}(p)$ du 6 de l'exercice 3 et le 10, e) de l'exercice 1, ou bien $0 \in J_{p;k}$ et il existe $b' \in G_p$ tel que $J_{p;k} <_c I(b')$, ou bien $1 \in J_{p;k}$ et il existe $b \in G_p$ tel que $I(b) <_c J_{p;k}$, ou bien il existe $(r;r') \in (\mathbb{N} \cap [1;p])^2$ avec $p = \max(r;r')$, il existe $b \in G_r$ et $b' \in G_{r'}$ tel que $I(b) <_c J_{p;k} <_c I(b')$. Suivant les trois cas précédents, on définit c_a respectivement par

$$c_a \;=\; \frac{0 + c_{b'}}{2}\;,\; c_a \;=\; \frac{c_b + 1}{2}\;,\; c_a \;=\; \frac{c_b + c_{b'}}{2}\,.$$

   Montrer que, pour tous $p, p' \in \mathbb{N}^*$, tout $a \in G_p$, tout $a' \in G_{p'}$,

$$a \prec a' \implies 0 \;<\; c_a \;<\; c_{a'} \;<\; 1\,.$$

3. Soit $p, p' \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = \max(p;p')$. Soit $a \in G_p$ et $a' \in G_{p'}$ tels que $I(a) \ll I(a')$ et tels que, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1;P]$ et $b \in G_s$, la proposition

$$\big(I(a) \ll I(b) \quad \text{et} \quad I(b) \ll I(a')\big) \tag{7}$$

   soit fausse. Montrer que $0 < c_a < c_{a'} < c_a + 2^{-P}$. Si, de plus, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1;P]$ et $b \in G_s$, la proposition

$$\big(I(b) \ll I(a)\big) \tag{8}$$

est fausse, montrer que $0 < c_a \leq 2^{-P}$. Si, de plus, pour tout $s \in \mathbb{N} \cap [1; P]$ et $b \in G_s$, la proposition

$$\big(I(a') \ll I(b)\big) \tag{9}$$

est fausse, montrer que $1 - 2^{-P} \leq c_{a'} < 1$.
(Indication : on pourra procéder par récurrence sur P.)

4. Dessiner dans un même schéma les graphes des fonctions g_1, g_2 et g_3.
5. Vérifier que g est bien définie et à valeurs dans $[0; 1]$. Vérifier que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, g_p est continue, est croissante et que $g_p([0; 1]) = [0; 1]$.
6. Vérifier que g est croissante, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
7. Vérifier que g est dérivable sur $\mathcal{O}$ et que sa dérivée y est nulle.
8. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
   a). Montrer que, pour $x \in J_{p;0}$, $0 \leq g(x) \leq 2^{-p}$ et $0 \leq g_p(x) \leq 2^{-p}$.
   b). Montrer que, pour $x \in J_{p;2^p-1}$, $1 - 2^{-p} \leq g(x) \leq 1$ et $1 - 2^{-p} \leq g_p(x) \leq 1$.
   c). Soit $k \in \mathbb{N}\cap]0; 2^p - 1[$ et $x \in J_{p;k}$. D'après le 10, e) de l'exercice 1 et le 6 de l'exercice 3, on a $J_{p;k} = [\sigma(a) + 3^{-p}; \sigma(a')]$, pour un $(r; r') \in (\mathbb{N} \cap [1; p])^2$ avec $\max(r; r') = p$, un $a \in G_r$ et un $a' \in G_{r'}$. Montrer que $c_a \leq g(x) \leq c_{a'}$ et $c_a \leq g_p(x) \leq c_{a'}$.
   d). Déduire des questions précédentes que

$$\sup_{x\in[0;1]} |g(x) - g_p(x)| \leq 2^{-p} .$$

9. En déduire que g est continue.