Exercice 21. : On considère les propositions suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \left(\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,,\quad |z+z'| \;\leq\; |z| + |z'|\right),\\ \mathcal{Q} &= \left(\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,,\quad \big||z| - |z'|\big| \;\leq\; |z - z'|\right).\end{aligned}$$

Vérifier l'équivalence $(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q})$.

Exercice 22. : Soit $(z;z') \in \mathbb{C}^2$. Par le cours, on sait que $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. On cherche à savoir quand cette inégalité large est une égalité.
On remarque que c'est le cas si $z = 0$ et, dans ce cas, $z = 0 \cdot z'$.
On remarque que c'est aussi le cas si $z' = 0$ et, dans ce cas, $z' = 0 \cdot z$.
On prend maintenant $(z;z') \in (\mathbb{C}^*)^2$.

1. Montrer l'implication

$$\left(\exists\,\lambda \in \mathbb{R}^+\,;\quad z' \;=\; \lambda \cdot z\right) \;\Longrightarrow\; \left(|z+z'| \;=\; |z| + |z'|\right).$$

2. Soit $(z;z') \in (\mathbb{C}^*)^2$ tel que $|z+z'| = |z| + |z'|$. On écrit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ avec $(r,r') \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ et $(\theta;\theta') \in \mathbb{R}^2$.

   a). Donner une expression de $|z+z'|^2$ en fonction de $(r;r';\theta;\theta')$, qui ne contient pas le signe $|\cdot|$.

   b). Vérifier que $\cos(\theta - \theta') = 1$.

   c). En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $z' = \lambda z$.

On a montré, pour $(z;z') \in \mathbb{C}^2$, l'équivalence

$$\left(|z+z'| \;=\; |z| + |z'|\right) \;\Longleftrightarrow\; \Big(\exists\,\alpha \in \mathbb{R}^+\,;\quad \left(z' \;=\; \alpha \cdot z\right) \quad \text{ou} \quad \left(z \;=\; \alpha \cdot z'\right)\Big).$$

Une autre preuve de cette équivalence est donnée dans les compléments du cours.

Exercice 23. : Disques de $\mathbb{C}$.
On pourra utiliser le fait que la droite passant par deux nombres complexes z et z' différents est donné par $\{tz + (1-t)z'; t \in \mathbb{R}\}$.

1. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On considère la partie A de $\mathbb{R}$ définie par

$$A \;:=\; \left\{|z|;\; z \in D(z_0;r]\right\}.$$

   Montrer que $\sup A \leq |z_0| + r$ et que $D(z_0;r] \subset D(0;|z_0|+r]$.

2. Soit $(z_0;z_1) \in \mathbb{C}^2$ et $(r_0;r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

a). On suppose $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| < r_0 + r_1 \,.$$

b). Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1] \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \leq r_0 + r_1 \,.$$

c). On suppose $r_0 > 0$. Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0[\subset D(z_1; r_1[\quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1$$

d). Montrer l'équivalence

$$D(z_0; r_0] \subset D(z_1; r_1] \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| + r_0 \leq r_1 \,.$$

Exercice 24. : Soit $z_1 \in \mathbb{C}$.

1. Soit $(r; r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_0 = z_1 + re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

   a). On suppose $r < r_1$. Montrer que $D(z_1; r_1[$ est un voisinage complexe de z_0.

   b). On suppose $r = r_1$. Montrer que ni $D(z_1; r_1[$ ni $D(z_1; r_1]$ n'est un voisinage complexe de z_0.

2. Montrer que les ensembles

$$A := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z) \in [-1; 1]\} \quad \text{et} \quad B := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z) \in]-1; 2]\}$$

   sont des voisinages complexes de 0 dans $\mathbb{C}$.

3. Montrer que les ensembles

$$A_1 := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_1) \in [-1; 1]\} \quad \text{et} \quad B_1 := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_1) \in]-1; 2]\}$$

   sont des voisinages complexes de z_1 dans $\mathbb{C}$.

Exercice 25. : Justifier toute réponse aux questions.

1. Montrer que l'intervalle $]-2; 3[$ est un voisinage réel de 0. L'intervalle $]-2; 3]$ est-il aussi un voisinage réel de 0 ?

2. L'intervalle $]-2; 3[$ est-il un voisinage réel de 3 ? L'intervalle $]-2; 3]$ est-il un voisinage réel de 3 ?

3. L'intervalle $]-2; 3 + 10^{-2023}[$ est-il un voisinage réel de 3 ?