L3, Analyse complexe, 2023/2024.

Complément au TD4.

Exercice 1. *Soit* $h : \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*\times\mathbb{R}$ *définie par, pour* $(r;t) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, $h(r;t) = (re^{it};t)$. *L'image* $\mathcal{S}$ *de* h *est la surface de Riemann du logarithme. On introduit aussi les fonctions suivantes.*
Soit $L : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par, pour* $(z;t) \in \mathcal{S}$, $L(z;t) = \ln(|z|) + it$. *Soit* $\tilde{L} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}\times\mathbb{R}$ *définie par, pour* $(z;t) \in \mathcal{S}$, $\tilde{L}(z;t) = (L(z;t);t)$. *Soit* $\widetilde{\exp} : \mathbb{C}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*\times\mathbb{R}$ *définie par, pour* $(z;t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$, $\widetilde{\exp}(z;t) = (\exp(z);t)$.

1. *Montrer que* $\mathcal{S} = \{(z;t) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R};\ z = |z|e^{it}\}$.
2. *Vérifier que, pour tout* $(r;t) \in \mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$, *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, $h(r;t+2k\pi) = h(r;t) + (0;2k\pi)$.
3. *Montrer que* h *est bijective de* $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ *sur* $\mathcal{S}$ *et que sa bijection réciproque* $h^{\langle -1\rangle}$ *est l'application de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ *donnée par, pour* $(z;t) \in \mathcal{S}$, $h^{\langle -1\rangle}(z;t) = (|z|;t)$.
4. *Montrer que* L *est bijective de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathbb{C}$ *et que sa bijection réciproque* $L^{\langle -1\rangle}$ *est l'application de* $\mathbb{C}$ *sur* $\mathcal{S}$ *donnée par, pour* $w \in \mathbb{C}$, $L^{\langle -1\rangle}(w) = (\exp(w);\Im(w))$.
5. *Montrer que l'image* $\tilde{L}(\mathcal{S})$ *de* $\mathcal{S}$ *par* $\tilde{L}$ *est donnée par*
$$\tilde{L}(\mathcal{S}) = \left\{(w;s) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R};\ s = \Im(w)\right\}.$$
6. *Montrer que la restriction de* $\widetilde{\exp}$ *à* $\tilde{L}(\mathcal{S})$ *est bijective de* $\tilde{L}(\mathcal{S})$ *sur* $\mathcal{S}$ *et que sa bijection réciproque* $\widetilde{\exp}^{\langle -1\rangle}$ *est* $\tilde{L}$.
7. *Soit* $(z;t) \in \mathcal{S}$. *Soit* $k = E(t/\pi + 1/2)$, *où* E *désigne la fonction partie entière. On pose* $\theta = (k-1)\pi$. *Vérifier que* $L(z;t) = \log_\theta(z)$, *où* $\log_\theta$ *est la détermination du logarithme sur* $\mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+$.
(Indication : on pourra vérifier que $\theta + \pi/2 \leq t < \theta + 3\pi/2$*).*

On dessinera la courbe $\gamma([-\pi;\pi])$ *de l'espace tridimensionnel, inscrite dans* $\mathcal{S}$, *où* γ *est l'application de* $[-\pi;\pi]$ *dans* $\mathcal{S}$ *donnée par, pour* $s \in [-\pi;\pi]$, $\gamma(s) = (e^{is};s)$.
On consultera sur

“ https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_de_Riemann ”

une représentation de la surface $\mathcal{S}$ *de Riemann du logarithme.*