Correction.

Ex. 12.

1. Soit $z \in D(z_0;r]$. On a

$$|z| = |z - z_0 + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| \leq r + |z_0| \quad (*)$$

Donc $r+|z_0|$ majore A. Par déf de $\sup A$, $\sup A \leq r+|z_0|$.
De plus, par $(*)$ pour $z \in D(z_0;r]$, on a $z \in D(0; r+|z_0|]$
donc $D(z_0;r] \subset D(0; r+|z_0|]$.

2-a). On suppose $r_0>0$ et $r_1>0$!!

$\Rightarrow$). Soit $z \in D(z_0;r_0[\cap D(z_1;r_1[$. On a

$$|z_0 - z_1| = |z_0 - z + z - z_1| \leq |z_0 - z| + |z - z_1| < r_0 + r_1.$$

$\Leftarrow$). Soit $r := |z_0 - z_1| \geq 0$. On supp. donc $r < r_0 + r_1$.

idée

prendre un z sur la dte (z_0z_1) entre z_0 et z_1, qui appartient aux 2 disques.

Soit $t \in [0;1]$ et $z = tz_0 + (1-t)z_1$. On a

$$(*) \begin{cases} |z - z_0| < r_0 \\ \text{et} \\ |z - z_1| < r_1 \end{cases} \iff \begin{cases} |(1-t)(z_1 - z_0)| < r_0 \\ \text{et} \\ |t(z_0 - z_1)| < r_1 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-t)r < r_0 \\ \text{et} \\ tr < r_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} r - r_0 < tr \\ \text{et} \\ tr < r_1 \end{cases} \iff \underbrace{r - r_0 < tr < r_1}_{(**)}.$$

Si $r=0$ on choisit $t=0$, $(**)$ est vraie (car $r_0>0$ et $r_1>0$)
donc $(*)$ aussi et $z \in D(z_0;r_0[\cap D(z_1;r_1[$.

Soit $r>0$. $(**) \iff 1 - \frac{r_0}{r} < t < \frac{r_1}{r}$ $(***)$.

On choisit $t \in \left]\max\left(1 - \frac{r_0}{r}; 0\right); \min\left(1; \frac{r_1}{r}\right)\right[$

C'est possible car $\max(0; 1-\frac{r_0}{r}) < \min(1; \frac{r_1}{r})$

En effet $\min(1, \frac{r_1}{r}) > 0$ (car $r_1 > 0$)

$1 > 1 - \frac{r_0}{r}$ (car $r_0 > 0$)

$\frac{r_1}{r} > 1 - \frac{r_0}{r}$ d'après l'hyp. $\underbrace{|z_0 - z_1|}_{= r} < r_0 + r_1$.

Pour un tel t, $(***)$ est vraie donc

$z \in D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[$.

Dans les 2 cas, $D(z_0; r_0[\cap D(z_1; r_1[\neq \emptyset$.

b).

$\Rightarrow$). Soit $z \in D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1]$. On a

$|z_0 - z_1| \leq |z_0 - z| + |z - z_1| \leq r_0 + r_1$.

$\Leftarrow$). Soit $r := |z_0 - z_1|$ et l'hyp. est $r \leq r_0 + r_1$.

Soit $t \in [0;1]$ et $z = tz_0 + (1-t)z_1$. On a, comme précédemment,

$$(*) \begin{cases} |z - z_0| \leq r_0 \\ \text{et} \\ |z - z_1| \leq r_1 \end{cases} \iff \underbrace{r - r_0 \leq tr \leq r_1}_{(**)}$$

Si $r = 0$, on prend $t = 0$ et $z = z_1 \in D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1]$.

Supp. $r > 0$. On a

$(**) \iff 1 - \frac{r_0}{r} \leq t \leq \frac{r_1}{r}$ $(***)$.

On choisit $t \in \left[\max(0; 1 - \frac{r_0}{r}); \min(1; \frac{r_1}{r})\right]$.

C'est possible car $\min(1, \frac{r_1}{r}) \geq 0$, $1 \geq 1 - \frac{r_0}{r}$

et, d'après l'hyp., $\frac{r_1}{r} \geq 1 - \frac{r_0}{r}$.

On a donc $z \in D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1]$.

Dans les 2 cas, $D(z_0; r_0] \cap D(z_1; r_1] \neq \emptyset$.

c). $D(z_0;r_0[\,\subset D(z_1;r_1[\iff |z_0-z_1|+r_0\le r_1$!! et $r_0>0$

$\Leftarrow$) Soit $z\in D(z_0;r_0[$. On a

$|z-z_1|=|z-z_0+z_0-z_1|\le|z-z_0|+|z_0-z_1|<r_0+|z_0-z_1|\le r_1$.

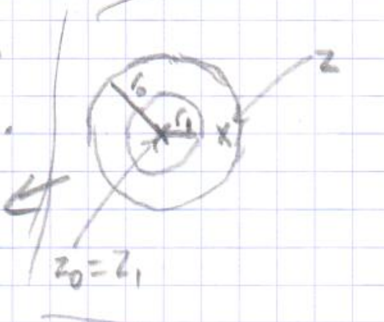
Donc $z\in D(z_1,r_1[$. D'où $D(z_0;r_0[\,\subset D(z_1,r_1[$.

$\Rightarrow$). On montre la contraposée :

$|z_0-z_1|+r_0>r_1 \Rightarrow D(z_0;r_0[\,\not\subset D(z_1;r_1[$.

Hyp : $r+r_0>r_1$ avec $r=|z_0-z_1|$.

1er cas : $r=0$. Soit $z=z_0+\frac{r_0+r_1}{2}$.



On a $|z-z_0|=\frac{r_0+r_1}{2}<r_0$ car $r_1<r_0$.

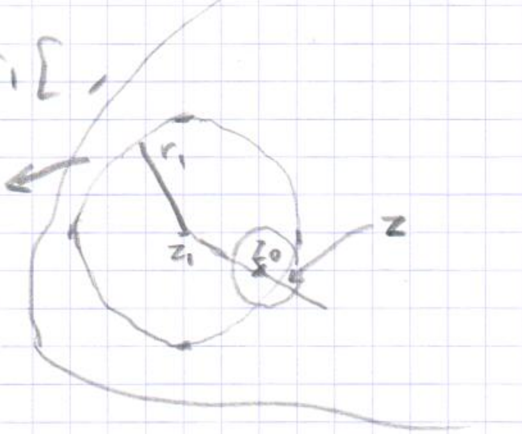
Donc $z\in D(z_0;r_0[$. On a

$|z-z_1|=|z-z_0|=\frac{r_0+r_1}{2}>r_1$ car $r_1<r_0$.

Donc $z\notin D(z_1;r_1[$.

D'où $D(z_0;r_0[\,\not\subset D(z_1;r_1[$.

2è cas : $r>0$.



Soit $\delta\in]0;r_0[$ et

$z=z_1+\frac{z_0-z_1}{r}(r+r_0-\delta)$.

On a $|z-z_0|=\left|(z_1-z_0)\left(1-\frac{r+r_0-\delta}{r}\right)\right|$

$=r\left|1-\frac{r+r_0-\delta}{r}\right|=r\left(\frac{r+r_0-\delta}{r}-1\right)$

(car $r+r_0-\delta\ge r$)

$=r_0-\delta<r_0$. Donc $z\in D(z_0;r_0[$.

On a

$|z-z_1|=|r+r_0-\delta|=r+r_0-\delta$;

Soit $\delta\in\left]0;\min(\underbrace{r+r_0-r_1}_{>0};\underbrace{r_0}_{>0})\right[$. On a $|z-z_1|>r_1$

Donc $z \notin D(z_1; r_1[$.
D'où $D(z_0; r_0[\not\subset D(z_1; r_1[$.

d).

$\Leftarrow$). Soit $z \in D(z_0; r_0]$. On a

$|z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \leq |z - z_0| + |z_0 - z_1| \leq r_0 + |z_0 - z_1| \leq r_1$.

Donc $z \in D(z_1; r_1]$. D'où $D(z_0; r_0] \subset D(z_1; r_1]$.

$\Rightarrow$) On montre la contraposée avec $r = |z_0 - z_1|$

$r_0 + r > r_1 \Rightarrow D(z_0; r_0] \not\subset D(z_1; r_1]$.

Cas $r = 0$: $z = z_0 + r_0$. On a $|z - z_0| = r_0$ donc $z \in D(z_0; r_0]$. Comme $|z - z_1| = |z - z_0| = r_0 > r_1$, $z \notin D(z_1; r_1]$. Donc $D(z_0; r_0] \not\subset D(z_1; r_1]$.

Cas $r > 0$: Soit $\delta \in [0; r_0]$ et $z = z_1 + \frac{z_0 - z_1}{r}(r + r_0 - \delta)$

On a $|z - z_0| = r_0 - \delta \leq r_0$ donc $z \in D(z_0; r_0]$.
On a $|z - z_1| = r + r_0 - \delta$.
On choisit $\delta \in \left[0; \min\left(r_0; \frac{r + r_0 - r_1}{2}\right)\right]$.
On a $\delta \in [0; r_0]$ et $r + r_0 - r_1 > \frac{r + r_0 - r_1}{2} \geq \delta$
donc $r + r_0 - \delta > r_1$. Donc $z \notin D(z_1; r_1[$.
Donc $D(z_0; r_0[\not\subset D(z_1; r_1]$.