6. Soit $(\varphi_p)_p$ et $(\psi_p)_p$ de suites de fonctions en escalier qui convergent vers f, uniformément sur $[a;b]$. Montrer que les suites

$$\left(\int_a^b \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t\right)_p \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b \psi_p(t)\,\mathrm{d}t\right)_p ,$$

qui convergent d'après 5, ont la même limite.

7. Soit $I(f)$ la limite d'un suite (6) où $(\varphi_p)_p$ est une suite de fonctions en escalier converge vers f, uniformément sur $[a;b]$. Vérifier que le complexe $I(f)$ ne dépend pas du choix, pour le définir, de la suite de fonctions en escalier convergeant vers f, uniformément sur $[a;b]$.

8. Montrer que

$$\big|I(f)\big| \;\leq\; I(|f|) \;\leq\; (b-a) \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|\,.$$

9. Montrer que $I(f) = I(\operatorname{Re} f) + iI(\operatorname{Im} f)$. En déduire que $I(f)$ coïncide avec l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

définie dans le cours. En particulier, on a le résultat de 8 pour l'intégrale du cours.

10. Déterminer $I(f)$ lorsque f est constante.

11. On note le I précédent par $I_{[a;b]}$. Soit $c \in]a;b[$. Montrer que

$$I_{[a;b]}(f) \;=\; I_{[a;c]}(f) \;+\; I_{[c;b]}(f)\,. \tag{7}$$

12. Soit $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(x) = I_{[a;x]}(f)$. Montrer que F est dérivable sur $[a;b]$ et que $F' = f$.

Exercice 19. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On montre ici que la courbe paramétrée γ est la concaténation des restrictions de γ à des sous-intervalles compacts appropriés de $[a;b]$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ des courbes continues telles que la concaténation

$$(\mathring{+})_{j=1}^{p}\ \gamma_j$$

soit bien définie. Montrer que cette concaténation est une fonction continue.

2. Soit $t_1 \in]a;b[$. Soit γ_1 (resp. γ_2) la restriction de γ à $[a;t_1]$ (resp. $[t_1;b]$). Montrer que γ est la concaténation $\gamma_1 \mathring{+} \gamma_2$.