2. Montrer que, pour $z \in \Omega_+$,

$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right). \tag{3}$$

3. Vérifier que la formule (3) est fausse pour $z = i - 1$.

4. Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Vérifier que

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \;=\; \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}.$$

5. En déduire que, pour $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$, on a

$$\mathrm{Arg}(z) \;=\; 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) \,+\, |z|}\right). \tag{4}$$

En particulier, la fonction Arg est continue sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ comme composition, quotient et somme de fonctions continues.

6. Soit $z_0 = (x_0; 0) \in \mathbb{R}^{-*}$. On va montrer que :

$$\lim_{z \to z_0} \mathrm{Arg}_{|\mathcal{I}^+} \;=\; \pi \quad \text{et} \quad \lim_{z \to z_0} \mathrm{Arg}_{|\mathcal{I}^-} \;=\; -\pi.$$

En particulier, Arg n'est pas continue en z_0.

a). Pour $z = (x;y) \in D(z_0; |z_0|/2[$, montrer que l'on a $|x| \geq |x_0|/2 > 0$ et que l'on a $|y/x| \leq 2|y|/|x_0|$.

b). Soit $z = (x;y) \in D(z_0; |z_0|/2[$ avec $y \neq 0$. Montrer que

$$\frac{y}{x \,+\, \sqrt{x^2 \,+\, y^2}} \;=\; \frac{|x|}{y}\left(1 \,+\, \sqrt{1 \,+\, \frac{y^2}{x^2}}\right).$$

c). Conclure.

Exercice 10. : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction argument principal Arg est $\mathrm{Arg}_{-\pi}$. On pourra utiliser les résultats de l'exercice 9.

1. Soit $\theta_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que $\theta - \theta_0 \in 2k\pi$, pour un $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\mathrm{Arg}_\theta = \mathrm{Arg}_{\theta_0} + 2k\pi$.
L'application $\theta \mapsto \mathrm{Arg}_\theta$ est donc 2π-périodique. Il suffit de la connaître sur $]-\pi;\pi]$ pour la connaître partout.

2. Montrer que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*, \quad \mathrm{Arg}_\theta(z) \;=\; \mathrm{Arg}\left(z \cdot e^{-i(\theta+\pi)}\right) \,+\, \theta \,+\, \pi.$$

En particulier, par l'exercice 9, la fonction Arg_θ est continue sur $\mathbb{C} \setminus (e^{i\theta}\mathbb{R}^+)$ comme composition et somme de fonctions continues.