Ex. 2.

4. $P \Longrightarrow Q$:

Soit $(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$. Par hyp.,

$\forall (a;b)\in\mathbb{C}^2,\ |a+b|\leq|a|+|b|$.

Pour $a=z_1-z_2$ et $b=z_2$, on a donc

$|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leq|z_1-z_2|+|z_2|$

donc $\quad |z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$.

Pour $a=z_2-z_1$ et $b=z_1$, on a

$|z_2| = |z_2-z_1+z_1| \leq |z_2-z_1|+|z_1|$

donc $\quad |z_2|-|z_1| \leq |z_2-z_1| = |z_1-z_2|$.

D'où

$\big||z_1|-|z_2|\big| = \max\big(|z_1|-|z_2|;|z_2|-|z_1|\big) \leq |z_1-z_2|$.

$Q \Longrightarrow P$: Soit $(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$. Par hyp.,

$\forall(a;b)\in\mathbb{C}^2,\ \big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$.

Pour $a=z_1+z_2$ et $b=z_2$, on a

$|z_1+z_2|-|z_2| \leq \big||z_1+z_2|-|z_2|\big| \leq |z_1|$

donc $\quad |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$.