

Ex. 11

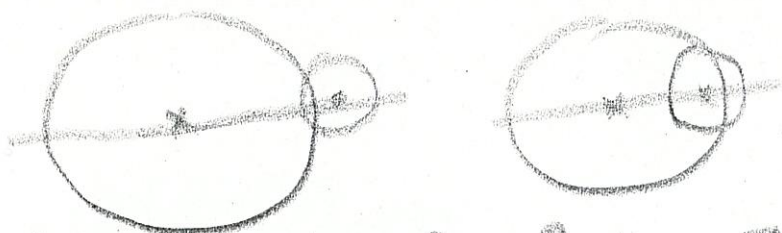
1

1. $\Rightarrow$) Soit $z \in D(z_0, r_0] \cap D(z_1, r_1]$.

On a

$$|z_0 - z_1| = |z_0 - z + z - z_1| \leq |z_0 - z| + |z - z_1| \leq r_0 + r_1.$$

$\Leftarrow$



On cherche $t \in [0, 1]$ t.s. $z_t := t z_1 + (1-t) z_0$ appartienne aux 2 disques. Soit $t \in [0, 1]$.

$$z_t \in D(z_0, r_0] \cap D(z_1, r_1] \Leftrightarrow \begin{cases} |z_t - z_0| \leq r_0 \\ |z_t - z_1| \leq r_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t(z_1 - z_0)| \leq r_0 \\ |(1-t)(z_1 - z_0)| \leq r_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t|z_1 - z_0| \leq r_0 \\ (1-t)|z_1 - z_0| \leq r_1 \end{cases}$$

Soit $l := |z_1 - z_0|$. Si $l = 0$, z_0 appartient aux deux disques. On suppose désormais $l > 0$.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq r_0/l \\ l \leq t l + r_1 \end{cases} \Leftrightarrow l - r_1 \leq t l \leq r_0.$$

Par hyp., $l - r_1 \leq r_0$ donc (*) est vraie pour $t = \frac{r_0 + l - r_1}{2}$, par exemple.

Donc $D(z_0, r_0] \cap D(z_1, r_1] \neq \emptyset$.

2- $\Leftarrow$) Soit $z \in D(z_0; r_0] \cap L$. On a 12

$$|z - z_1| = |z - z_0 + z_0 - z_1| \leq |z - z_0| + |z_0 - z_1| \leq r_0 + |z_0 - z_1| \leq r_1$$

par hyp.

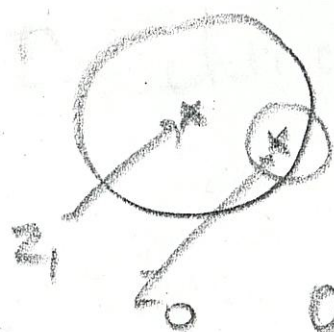
Donc $z \in D(z_1; r_1] \cap L$.

$\Rightarrow$) On montre la contraposée :

$$|z_1 - z_0| + r_0 > r_1 \Rightarrow D(z_0; r_0] \not\subset D(z_1; r_1] \cap L.$$

Soit $l = |z_1 - z_0|$. Hyp. : $l + r_0 > r_1$, et $l > 0$.

On cherche $t \in \mathbb{R}^-$ t.q.



$$z_t = tz_1 + (1-t)z_0 \in D(z_0; r_0] \setminus D(z_1; r_1]$$

On a

$$\underbrace{z_t \in D(z_0; r_0] \setminus D(z_1; r_1]}_{(*)} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_t - z_0| \leq r_0 \\ \text{et} \\ |z_t - z_1| > r_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |t| r < r_0 \\ \text{et} \\ |t-1| r \geq r_1 \end{cases}$$

Si $l \geq r_1$, $(*)$ est vraie pour $t=0$.
On suppose $0 < l \leq r_1$ et on suppose $|t| \geq 1$.

$$(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -tl < r_0 \\ \text{et} \\ (1-t)l \geq r_1 \end{cases} \Leftrightarrow r_1 - l \leq -tl < r_0$$

Par hyp. $0 \leq r_1 - l < r_1 \leq l + r_0$. Donc $(*)$ est vraie
pour $t = -\frac{r_1 - l}{2l}$.

On termine par le cas $l=0$.

3 |

Par hyp. $r_0 > r_1$. Soit $z = \frac{r_0+r_1}{2} + z_0$.

On a $|z - z_0| = \frac{r_0+r_1}{2} \in]r_1; r_0[$ et $z_1 = z_0$.

donc $z \in D(z_0; r_0) \cap D(z_1; r_1)$.