

Ex. 11.

5_ Convexité de B.

Soit $z_1 = (x_1, y_1) \in B$, $z_2 = (x_2, y_2) \in B$ et $t \in [0; 1]$.On étudie la fonction $[0; 1] \ni t \mapsto \text{Arg}(tz_2 + (1-t)z_1)$.Pour $t \in [0; 1]$, on a

$$\text{Re}(tz_2 + (1-t)z_1) = t \text{Re}(z_2) + (1-t) \text{Re}(z_1).$$

Or, pour $z \in B$, $\text{Re}(z) = |z| \cos(\text{Arg}(z)) > 0$

$$\text{car } \text{Arg}(z) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[.$$

D'où $\text{Re}(tz_2 + (1-t)z_1) > 0$.Par l'ex. 9, on a, pour $t \in [0; 1]$,

$$\text{Arg}(tz_2 + (1-t)z_1) = \text{Arctan}\left(\frac{ty_2 + (1-t)y_1}{tx_2 + (1-t)x_1}\right).$$

Par composition, c'est dérivable et

$$\frac{d}{dt} \text{Arg}(tz_2 + (1-t)z_1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{ty_2 + (1-t)y_1}{tx_2 + (1-t)x_1}\right)^2} \times \frac{N(t)}{(tx_2 + (1-t)x_1)^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } N(t) &= (y_2 - y_1)(tx_2 + (1-t)x_1) - (x_2 - x_1)(ty_2 + (1-t)y_1) \\ &= tx_2y_2 - tx_2y_1 + (1-t)x_1y_2 - (1-t)x_1y_1 \\ &= (tx_2y_2 - tx_1y_2 + (1-t)x_2y_1 - (1-t)x_1y_1) \\ &= (1-t)(x_1y_2 - x_2y_1) + t(x_2y_2 - x_1y_1) \\ &= x_1y_2 - x_2y_1. \end{aligned}$$

Si $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, f est constante

donc $f(t) = \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$.

Si $x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0$, f est $\nearrow$ et, pour $t \in [0, 1]$,

$$\text{Arg}(z_1) = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = \text{Arg}(z_2).$$

or $\text{Arg}(z_1) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$ et $\text{Arg}(z_2) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$

donc $f(t) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$.

Si $x_1 y_2 - x_2 y_1 < 0$, f est $\searrow$ et, pour $t \in [0, 1]$,

$$\text{Arg}(z_2) = f(1) \leq f(t) \leq f(0) = \text{Arg}(z_1).$$

D'in $f(t) \in]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}[$.

Dans tous les cas $tz_2 + (1-t)z_1 \in B$.