

Ex. 15.

11

4 - Soit $\varepsilon > 0$, soit $\delta = \frac{\varepsilon}{1+k} > 0$.

Soit $(z, z') \in D^2 \cap \gamma$, $|z - z'| < \delta$. On a

$$|f(z) - f(z')| \leq k |z - z'| \leq \underbrace{(1+k)}_{>0} |z - z'| < (1+k)\delta = \varepsilon.$$

car f k -lipsch.

5 - Soit $z_0 \in D$, soit $\varepsilon > 0$, par hyp.

il existe $\delta > 0 \cap \gamma$.

$$\forall (z, z') \in D^2, |z - z'| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z')| < \varepsilon, (*)$$

Soit $z \in D \cap \gamma$, $|z - z_0| < \delta$. On a, par (*),

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Donc f est conti. en z_0 .

Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in D$,

f est conti. sur D .

6 - a). La négation de la prop. précédente est vraie donc

$$\forall \delta > 0, \exists (z, z') \in D^2, (|z - z'| < \delta \text{ et } |f(z) - f(z')| \geq \varepsilon).$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(z_n, z'_n) \in D^2 \cap \gamma$.

$$|z_n - z'_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(z_n) - f(z'_n)| \geq \varepsilon.$$

b). Pour tout n , on a

(2)

$$|z_{\varphi(n)} - z'_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}.$$

Comme $\lim \varphi = +\infty$ (g.l.1), $(z'_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)})_n$ tend vers 0 par le Th. des gendarmes.

Pour tout n ,

$$z'_{\varphi(n)} = \underbrace{(z'_{\varphi(n)} - z_{\varphi(n)})}_{\downarrow 0} + \underbrace{z_{\varphi(n)}}_{\downarrow \ell}$$

donc $z'_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$ par somme.

c). Comme f est conti., $z'_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$ et $z_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$, on a, par b cours,

$$f(z_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell) \text{ et } f(z'_{\varphi(n)}) \rightarrow f(\ell).$$

Comme f est conti., on peut passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans les inégalités

$$|f(z_{\varphi(n)}) - f(z'_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon.$$

On obtient $0 \geq \varepsilon$. Contr.