

Ex. 18

1

- 1 - Par hyp. il existe $a=t_0 < \dots < t_n=b$ et $(c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une suite de complexes t_k , pour $0 \leq k \leq n-1$, $\varphi|_{[t_k; t_{k+1}]}$ est cte égale à c_k . Donc, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\operatorname{Re} \varphi|_{[t_k; t_{k+1}]}$ et $\operatorname{Im} \varphi|_{[t_k; t_{k+1}]}$ sont ctes égales à $\operatorname{Re}(c_k)$ et $\operatorname{Im}(c_k)$ respectivement. Donc $\operatorname{Re} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$ sont en escalier.

De plus

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) dt &= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) c_k = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \operatorname{Re}(c_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \operatorname{Im}(c_k) \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \varphi(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

- 2 - Par hyp. il existe $a=t_0 < \dots < t_n=b$ et $(c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ des complexes t_k , pour $0 \leq k \leq n-1$, $\varphi|_{[t_k; t_{k+1}]}$ est cte égale à c_k . Donc, pour $0 \leq k \leq n-1$, $|\varphi|_{[t_k; t_{k+1}]}$ est cte égale à $|c_k|$. Donc $|\varphi|$ est en escalier.

On a

$$\left| \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) c_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \overbrace{(t_{k+1} - t_k)}^{t_k - t_{k+1}} |c_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) |c_k| = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

et, par la L2,

$$\int_a^b |\varphi(t)| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a; b]} |\varphi(t)|.$$

- 3 - Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'uniforme conti. de f , il existe $\delta > 0$ tq.

$$\forall (t, t') \in [a; b]^2, |t - t'| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon. (*)$$

Pour $p = E\left(\frac{2(b-a)}{\delta}\right)$: On a $a + p \frac{\delta}{2} \leq b < a + (p+1) \frac{\delta}{2}$.

Pour $k \in [0; p]$ soit $t_k = a + k \frac{\delta}{2}$ et $t_{p+1} = b$. E

Soit $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $0 \leq k \leq p$, pour $t \in [t_k; t_{k+1}]$

$$\varphi(t) = f(t_k) \quad \text{et} \quad \varphi(t_{p+1}) = \varphi(b) = f(b).$$

φ est en escalier. Soit $t \in [a; b]$. Il existe $k \in [0; p]$ tel
t.q. $t \in [t_k; t_{k+1}]$. On a donc, par (*),

$$|f(t) - \varphi(t)| = |f(t) - f(t_k)| < \varepsilon$$

Car $|t - t_k| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. De plus $|f(b) - \varphi(b)| = 0 < \varepsilon$.

$$\text{D'où} \quad \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon.$$

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après 3, il existe $\varphi_p: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$
en escalier t.q.

$$\sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_p(t)| \leq \frac{1}{p} \quad (**)$$

Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} = 0$, $(\varphi_p) \rightarrow f$ unif. sur $[a; b]$
par (**) et le Th. des gendarmes.

5. Soit $(n; p) \in \mathbb{N}^2$. Par G. 1 et le L2,

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi_{n+p} - \varphi_n)(t) dt &= \int_a^b (\operatorname{Re} \varphi_{n+p} - \operatorname{Re} \varphi_n)(t) dt + i \int_a^b (\operatorname{Im} \varphi_{n+p} - \operatorname{Im} \varphi_n)(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} \varphi_{n+p}(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_{n+p}(t) dt - \left(\int_a^b \operatorname{Re} \varphi_n(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_n(t) dt \right) \\ &= \int_a^b \varphi_{n+p}(t) dt - \int_a^b \varphi_n(t) dt. \end{aligned}$$

D'où, par 2,

$$\left| \int_a^b \varphi_{n+p}(t) dt - \int_a^b \varphi_n(t) dt \right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a; b]} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)|. \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}. \quad (**)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $p \neq n$, $t \in [a; b]$,

(3)

$$|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \leq |\varphi_{n+p}(t) - f(t)| + |f(t) - \varphi_n(t)| \leq \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_{n+p}(t)| + \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_n(t)|$$

$$< \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}$$

par (**), Dne

$$\sup_{t \in [a; b]} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{b-a} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Dne, par (*),

$$\left| \int_a^b \varphi_{n+p}(t) dt - \int_a^b \varphi_n(t) dt \right| < \varepsilon$$

On a montré que $(\int_a^b \varphi_n(t) dt)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par L1, elle converge.

6- Comme précédemment on a, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_a^b \varphi_p(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| = \left| \int_a^b (\varphi_p - \varphi)(t) dt \right|$$

$$\leq (b-a) \sup_{t \in [a; b]} |\varphi_p(t) - \varphi(t)|$$

$$\leq (b-a) \left[\sup_{t \in [a; b]} |\varphi_p(t) - f(t)| + \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi(t)| \right]$$

$\xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$ par hyp.

Dne $\lim_{p \rightarrow \infty} (\int_a^b \varphi_p(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt) = 0$ par le th.

des séries. Dne $(\int_a^b \varphi_p)_p$ et $(\int_a^b \varphi_p)$ ont m. limite par somme.

7. Si $(\varphi_p)_p$ est une suite de
fonct. en esc. convergeant vers f
unif. sur $[a, b]$, on sait d'après 7 que

$$\lim_p \int_a^b \varphi_p(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Donc $I(f)$ est bien indep. du choix
de la suite choisie de fonct. en esc. cv.
unif. vers f .

8. Soit (φ_p) une suite de fonct. en esc.
cv. unif. vers f (existe par 4)

pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a, par (5),

$$\left| \int_a^b \varphi_p(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi_p(t)| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a, b]} |\varphi_p(t)| \quad (*)$$

inég. trian.

$$\text{Pour } t \in [a, b], \quad \left| |\varphi_p(t)| - |f(t)| \right| \leq |\varphi_p(t) - f(t)| \leq \sup_{s \in [a, b]} |\varphi_p(s) - f(s)|.$$

$$\text{Donc } \sup_{t \in [a, b]} \left| |\varphi_p(t)| - |f(t)| \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |\varphi_p(t) - f(t)|.$$

Donc, par le th. des gendarmes, $(|\varphi_p|)_p$ cv. unif.
vers $|f|$ sur $[a, b]$. Par déf.

$$\int_a^b |f(t)| dt = \lim_p \int_a^b |\varphi_p(t)| dt.$$

Pour $t \in [a, b]$,

$$|\varphi_p(t)| \leq |\varphi_p(t) - f(t)| + |f(t)| \leq \sup_{s \in [a, b]} |\varphi_p(s) - f(s)| + \sup_{s \in [a, b]} |f(s)|.$$

Par (*), on a, pour tout p ,

$$\left| \int_a^b \varphi_p(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi_p(t)| dt \leq (b-a) \left(\underbrace{\sup_{t \in [a,b]} |\varphi_p(t) - f(t)|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\sup_{t \in [a,b]} |f(t)|}_{\downarrow 0} \right)$$

$\downarrow p \rightarrow \infty$
 $\int_a^b |f(t)| dt$

$\rightarrow \left| \int_a^b f(t) dt \right|$
 car l'intégrale est continue.

Par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

9 - Par 4, il existe $(\varphi_p)_p$ une suite de fct. en asc. unif. vers f .
 Pour tout p , on a, cf. 1,

$$\int_a^b \varphi_p(t) dt \leftarrow \int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \varphi_p(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_p(t) dt$$

pour $t \in [a,b]$,

$$|\operatorname{Re} \varphi_p(t) - \operatorname{Re} f(t)| = |\operatorname{Re}(\varphi_p(t) - f(t))| \leq |\varphi_p(t) - f(t)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |\varphi_p(t) - f(t)| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

$$|\operatorname{Im} \varphi_p(t) - \operatorname{Im} f(t)| = |\operatorname{Im}(\varphi_p(t) - f(t))| \leq |\varphi_p(t) - f(t)| \leq \sup_{t \in [a,b]} |\varphi_p(t) - f(t)| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Par 6. Th. des gendarmes

$(\operatorname{Re} \varphi_p)_p$ conv. unif. vers $\operatorname{Re} f$

$(\operatorname{Im} \varphi_p)_p \xrightarrow{\quad\quad\quad} \operatorname{Im} f$

Donc $\int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b \operatorname{Re} \varphi_p(t) dt$ et

$$\int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt = \lim_p \int_a^b \operatorname{Im} \varphi_p(t) dt.$$

16

Pour $p \rightarrow \infty$, on obtient, par somme et produit,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt.$$

c'est la def. du conj.
de $\int_a^b f$.

10 - Soit $c \in \mathbb{C}$ et f est égale à c .

f est un escalier donc

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a) \times c$$

11. (voir correction 1. pdf).

On remarque que si f est escalier

sur $[a; b]$, $\varphi|_{[a; c]}$ est un escalier

sur $[a; c]$ et $\varphi|_{[c; b]}$ est un escalier

sur $[c; b]$.

Soit $(\varphi_p)_p$ une suite de fct. en esc. sur $[a; b]$

qui converge unif. vers f .

Comme $\sup_{t \in [a; c]} |f(t) - \varphi_p(t)| \leq \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_p(t)|$

et $\sup_{t \in [c; b]} |f(t) - \varphi_p(t)| \leq \sup_{t \in [a; b]} |f(t) - \varphi_p(t)|$

$(\varphi_p|_{[a; c]})_p$ conv. unif. vers $f|_{[a; c]}$

et $(\varphi_p|_{[c; b]})_p \xrightarrow{\quad} f|_{[c; b]}.$

Donc,
$$I[a;c](f) = \lim_{p \rightarrow \infty} I[a;c](\varphi_p)$$

 et
$$I[c;b](f) = \lim_{p \rightarrow \infty} I[c;b](\varphi_p).$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $a = t_0 < \dots < t_m = b$
 une subdiv. t_p . $\varphi_p = \text{step}$ sur
 $[t_k; t_{k+1}[$. Soit k_0 t.p. $c \in [t_{k_0}; t_{k_0+1}[$.

On a

$$\begin{aligned} I[a;b](\varphi_p) &= \sum_{k=0}^{k_0-1} (t_{k+1} - t_k) \varphi_k + \underbrace{(t_{k_0+1} - t_{k_0}) \varphi_{k_0}}_{= (t_{k_0+1} - c) \varphi_{k_0} + (c - t_{k_0}) \varphi_{k_0}} + \sum_{k=k_0+1}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) \varphi_k \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} (t_{k+1} - t_k) \varphi_k + (c - t_{k_0}) \varphi_{k_0} + (t_{k_0+1} - c) \varphi_{k_0} + \sum_{k=k_0+1}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) \varphi_k \\ &= I[a;c](\varphi_p) + I[c;b](\varphi_p). \end{aligned}$$

Par passage à la limite $p \rightarrow \infty$, on obtient

$$I[a;b](f) = I[a;c](f) + I[c;b](f).$$

12. Soit On admet que $I[a;b](f_1 - f_2) = I[a;b](f_1) - I[a;b](f_2)$
 (cela peut se démontrer par approximation de f et
 f_2 par des funct. en escalier)

Soit $x \in]a; b[$. Soit $h > 0$ petit ($x+h \leq b$). Par (7),

$$F(x+h) = I[a; x+h](f) = \underbrace{I[a; x](f)}_{F(x)} + I[x; x+h](f)$$

donc, par 10, on a

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &= |I[x; x+h](f) - I[x; x+h](f(x))| \\ &\text{par le résultat admis} \\ &= |I[x; x+h](f - f(x))|. \end{aligned}$$

Par 8,

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \underbrace{(x+h-x)}_{=h} \sup_{t \in [x, x+h]} |f(t) - f(x)|.$$

18

Par $h < 0$ t_3 . $x+h > a$, on a, de manière similaire,

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq |h| \sup_{t \in [x+h, x]} |f(t) - f(x)|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est conti. en x , il existe

$$\delta' > 0 \quad t_3. \quad |t-x| < \delta' \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $\delta = \min(\delta'; b-x; x-a) > 0$. Pour $|h| < \delta$, on a donc

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq |h| \frac{\varepsilon}{2} < |h| \varepsilon.$$

$$\text{Donc } F(x+h) - F(x) - hf(x) = o(|h|).$$

Donc F est deriv. en x de nb. derivé $f(x)$.

Lorsque $x=b$, on procède de m. en ne considérant que les $h < 0$. Lorsque $x=a$,
 $h > 0$,