

Ex. 20.

1

1 - a). Soit $\exists t_{j-1}, t_j$, $\gamma = \varphi_j$ qui est
conti. donc γ est conti.

Soit $1 \leq j \leq m-1$. Comme $\gamma = \varphi_j$ sur $[t_{j-1}, t_j]$

et φ_j est conti. en t_j , on a

$$\lim_{t \rightarrow t_j} \gamma(t) = \varphi_j(t_j) = \varphi_{j+1}(t_j) = \gamma(t_j)$$

cf. concatenation.

Comme $\gamma = \varphi_{j+1}$ sur $[t_j, t_{j+1}]$ et φ_{j+1} est conti.
en t_j , on a

$$\lim_{t \rightarrow t_j} \gamma(t) = \varphi_{j+1}(t_j) = \varphi_j(t_j) = \gamma(t_j).$$

Donc γ est conti. en t_j .

Comme $\gamma = \varphi_1$ sur $[a, t_1]$ et φ_1 est conti.
en a , γ l'est aussi.

Comme $\gamma = \varphi_m$ sur $[t_{m-1}, b]$ et φ_m est
conti. en b , γ l'est aussi.

b). Sur $\exists t_{j-1}, t_j$, $\gamma = \varphi_j$ qui est C^1
donc γ est C^1 .

c). Pour $t \in \exists t_{j-1}, t_j$, on a $\gamma' = \varphi_j'$
Comme φ_j est C^1 , φ_j' est conti. donc

$$\gamma'_j(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_j} \varphi'_j(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_j} \gamma'(t).$$

$$\text{et } \varphi'_j(t_{j-1}) = \lim_{t \rightarrow t_{j-1}} \varphi'_j(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_{j-1}} \gamma'(t).$$

2 - a) sur $[t_{j-1}, t_j]$, φ_j est conti. donc φ_j est dérivable et dérivée φ_j' (cf. ex. 18)
 Donc φ_j est C^1 .

b) On a $\varphi_j(t_{j-1}) = 0 + \gamma(t_{j-1})$.

Pour $t \in]t_{j-1}, t_j[$, $\varphi_j'(t) = \varphi_j(t) = \gamma_j'(t)$

Donc $\varphi_j - \gamma_j$ est cte sur $]t_{j-1}, t_j[$ et, comme φ_j et γ_j sont conti. en t_{j-1} , cette cte est $\lim_{t \rightarrow t_{j-1}} (\varphi_j - \gamma_j)(t) = \varphi_j(t_{j-1}) - \gamma(t_{j-1}) = 0$.

Comme γ et φ_j sont conti. en 0

$$\varphi_j(t_j) - \gamma(t_j) = \lim_{t \rightarrow t_j} (\varphi_j - \gamma_j)(t_j) = 0$$

donc $\gamma(t_j) = \varphi_j(t_j)$.

c) Pour $1 \leq j \leq n$, sur $[t_{j-1}, t_j]$, $\gamma = \varphi_j$.

Donc, pour $1 \leq j \leq n-1$, $\varphi_j(t_j) = \gamma(t_j) = \varphi_{j+1}(t_j)$.

Donc $\sum_{j=1}^n \varphi_j$ est bien déf. et vaut γ .

3 - a) $a = t_0 < t_1 = b$ est admissible pour γ car γ est dér. sur $]a, b[$.

La prop. $\forall j, 0 < j < 1 \Rightarrow t_j \in S$ est vraie par $(0 < j < 1)$ est fausse.

Donc cette subdiv. est optimale.

Si on a une subdiv. adm. $a = t'_0 < \dots < t'_p = b$ avec $p \geq 2$ alors

$t_1 \in]a; b[$. Mais γ est dér. ant t_1 donc $t_1 \notin S$. $\square$
Donc cette subdiv. n'est pas optimale.

Une subdiv. optimale est donc née: $a = t_0 < t_1 = b$.

b) Soit $\Delta \in S$. Si $\Delta = a$, $\Delta = t_0$.

Si $\Delta = b$, $\Delta = t_n$. Supp. $\Delta \in]a; b[$.

Comme γ est dér. sur chaque $]t_{j-1}; t_j[$

$\Delta \notin \bigcup_{1 \leq j \leq n}]t_{j-1}; t_j[$ donc $\Delta \in \{t_j; 1 \leq j \leq n\}$.

c) Sur $]t_{j-1}; t_j[$, γ est C^1 . Comme γ est C^1 par morceaux γ_j' n'est pas nul par conti. en un t_j sur $[t_{j-1}; t_j]$. Donc cette subdiv. est admissible.

Comme, pour tout j , $t_j \in S$, elle est aussi optimale.

Soit $a = t_0 < \dots < t_n = b$ une subdiv. optimale pour γ . On a $t_j \in S$, pour tout j .

Donc $\{t_0; \dots; t_n\} \subseteq S$. Supposons que $s_k \notin \{t_0; \dots; t_n\}$

Alors $\Delta_k \in]t_{j-1}; t_j[$. Comme γ est dér.

sur $]t_{j-1}; t_j[$, on a une contr. car $\Delta_k \in S$.

Donc $S \subset \{t_0; \dots; t_n\}$.

D'où $S = \{t_0; \dots; t_n\}$. Donc il y a une seule subdiv. optimale.