

Ex. 21.

(voir notes année dernière) 1

1. Correction de l'énoncé, on montre que S est égal à

$$B := \left\{ z \in \mathbb{C}; \exists (s, t) \in \left(\{1\} \times [0; 1] \right) \cup \left([0; 1] \times \{0\} \right); \right. \\ \left. z = s(tw + (1-t)v) + (1-s)u. \right\}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z \in B \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \exists (s, t) \in \{1\} \times [0; 1]; z = s(tw + (1-t)v) + (1-s)u \\ \text{ou} \\ \exists (s, t) \in [0; 1] \times \{0\}; z = s(tw + (1-t)v) + (1-s)u \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists t \in [0; 1]; z = tw + (1-t)v \\ \text{ou} \\ \exists s \in [0; 1]; z = s(0w + (1-0)v) + (1-s)u \\ \text{ou} \\ \exists s \in [0; 1]; z = s(1w + (1-1)v) + (1-s)u \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists t \in [0; 1]; z = tw + (1-t)v \\ \text{ou} \\ \exists s \in [0; 1]; z = s0 + (1-s)u \\ \text{ou} \\ \exists s \in [0; 1]; z = s1 + (1-s)u \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow z \in [v; w] \text{ ou } z \in [u; v] \text{ ou } z \in [u; w] \Leftrightarrow z \in S$$

★ d'après l'ex. 5.

2- Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme u n'appartient pas à la droite passant par v et w , les vect. $v-u$ et $w-v$ forment une base de $\mathbb{C}$. Dne, il existe $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq.

$$z-u = \lambda(v-u) + \mu(w-v).$$

On a
 $z \in \mathcal{D}_u \Leftrightarrow \lambda = 0$

Dne $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}_u \Leftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists! \mu \in \mathbb{R}; z = u + \lambda(v-u) + \mu(w-v)$
 $\Leftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists! \mu \in \mathbb{R}; z = (1-\lambda)u + \lambda\left(v + \frac{\mu}{\lambda}(w-v)\right)$
 $\Leftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists! \mu \in \mathbb{R}; z = (1-\lambda)u + \lambda\left(\frac{\mu}{\lambda}w + (1-\frac{\mu}{\lambda})v\right)$
 $\Leftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists! t \in \mathbb{R}; z = (1-\lambda)u + \lambda(tw + (1-t)v).$

On a
 $z \in T \cap \mathcal{D}_u \Leftrightarrow \exists t \in [0; 1]: z = u + 0v_t \Leftrightarrow z = u.$

Comme $u \in S$, et $T \cap \mathcal{D}_u = \{u\}$, $(T \setminus S) \cap \mathcal{D}_u = \emptyset$.

3- Soit $z = (x; y)$ et $z' = (x'; y')$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = c$ or
 $f(z + \lambda z') - f(0) = f(x + \lambda x'; y + \lambda y') - f(0) = a(x + \lambda x') + b(y + \lambda y') - c$
 $= ax + by + \lambda(ax' + by') = f(z) - f(0) + \lambda(f(z') - f(0))$

Dne $f - f(0)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire.

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ et $t \in \mathbb{R}$. 13

$$f(tz_1 + (1-t)z_2) = (f(tz_1 + (1-t)z_2) - f(0)) + f(0)$$

par $\mathbb{R}$ -linéar. de $f - f(0)$

$$= t(f(z_1) - f(0)) + (1-t)(f(z_2) - f(0)) + f(0)$$

$$= tf(z_1) + (1-t)f(z_2) - f(0) + f(0)$$

$$= tf(z_1) + (1-t)f(z_2).$$

noté $\mathcal{D}_{uv}$

4- Comme u n'appartient pas à la droite passant par v et w
 $f_2(u) \neq 0$. Si w appartenait à $\mathcal{D}_{uv}$

alors u appartiendrait à $\mathcal{D}_{vw}$. Contr. Or u

n'appartient pas à $\mathcal{D}_{uv}$ donc $f_1(w) \neq 0$

De m. v n'appartient pas à $\mathcal{D}_{uw}$ donc $f_3(v) \neq 0$.

Rq: on peut obtenir de telles fonct. f_1, f_2 et f_3 en appliquant le 3 de l'ex. 5.

5- Comme $f_1(w) \neq 0$, $\text{sgn}(f_1(w))$ est déf.

On pose $g_1 = \text{sgn}(f_1(w)) f_1$.

$$\text{On a } g_1^{-1}(\{0\}) = f_1^{-1}(\{0\}) = \mathcal{D}_{uv}$$

$$\text{et } g_1(w) = \text{sgn}(f_1(w)) f_1(w) > 0.$$

De m. on pose $g_2 = \text{sgn}(f_2(u)) f_2$ et

$g_3 = \text{sgn}(f_3(v))f_3$. g_1, g_2 et g_3 conviennent. 4

6 - D'après la preuve de 1, on a

$$z \in [u; v] \Leftrightarrow \exists (s; t) \in [0; 1] \times]0; 1[; z = s v_t + (1-s)u$$

$$z \in [v; w] \Leftrightarrow \exists (s; t) \in]1; 1[\times [0; 1]; z = s v_t + (1-s)u$$

$$z \in [u; w] \Leftrightarrow \exists (s; t) \in [0; 1] \times]1; 1[; z = s v_t + (1-s)u.$$

Soit $z \in T \setminus S$. Par déf. de T , il existe $(s; t) \in [0; 1]^2 \setminus \{3\}$. $z = s v_t + (1-s)u$.

Comme $z \notin [u; v]$, $t \neq 0$. Comme $z \notin [v; w]$, $s \neq 1$.

Comme $z \notin [u; w]$, $t \neq 1$. Comme $z \notin D_u$,

$s \neq 0$ par 2. On a donc $s > 0$, $t > 0$, $(1-s) > 0$ et $(1-t) > 0$.

Soit $j \in \{1, 2, 3\}$. On a, par 3,

$$g_j(z) = s g_j(v_t) + (1-s) g_j(u) = s(t g_j(w) + (1-t) g_j(v)) + (1-s) g_j(u).$$

Comme $g_1(u) = g_1(v) = 0$ et $g_1(w) > 0$, on a

$$g_1(z) = s t g_1(w) > 0 \text{ car } s > 0 \text{ et } t > 0.$$

Comme $g_2(v) = g_2(w) = 0$ et $g_2(u) > 0$, on a

$$g_2(z) = (1-s) g_2(u) > 0 \text{ car } 1-s > 0.$$

Comme $g_3(u) = g_3(w) = 0$ et $g_3(v) > 0$, on a

$$g_3(z) = s(1-t) g_3(v) > 0 \text{ car } s > 0 \text{ et } (1-t) > 0.$$

7- Soit $z \in \mathcal{G}$ tq. $z \notin T \cup S$ et $z \notin D_u$. [5]

Comme $z \notin D_u$, il existe, par z , $(s; t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tq. $z = s v_t + (1-s)u$.

1^{er} cas: $z \in S$. z appartient à l'un des segments $[u; v]$, $[v; w]$ et $[u; w]$ donc il existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tq. $g_j(z) = 0$.

2^e cas: $z \notin T$.

a) Supposons $g_1(z) > 0$ et $g_2(z) > 0$. Alors, d'après la preuve de 6,

$$0 < g_1(z) = \underbrace{st}_{>0} g_1(w) \text{ donc } st > 0$$

$$0 < g_2(z) = \underbrace{(1-s)}_{>0} g_2(w) \text{ donc } 1-s > 0$$

1^{er} cas: $\Lambda \in [0; 1]$. Comme $st > 0$, $\Lambda > 0$ et $t > 0$.

Comme $z \notin T$, $t \notin [0; 1]$ donc $t > 1$.

$$0 = g_3(z) = \underbrace{\Lambda}_{>0} \underbrace{(1-t)}_{<0} g_3(w) < 0.$$

2^e cas: $\Lambda < 0$. Comme $st > 0$, $t < 0$ donc

$$1-t > 0. \text{ D'où } g_3(z) = \underbrace{\Lambda}_{<0} \underbrace{(1-t)}_{>0} g_3(w) < 0.$$

b). Supposons $g_2(z) > 0$ et $g_3(z) > 0$. Alors

$$0 < g_2(z) = \underbrace{(1-s)}_{>0} g_2(w) \text{ donc } 1-s > 0.$$

$$0 < g_3(z) = \underbrace{\Lambda(1-t)}_{>0} g_3(w) \text{ donc } \Lambda(1-t) > 0.$$

1^{er} cas : $\lambda \geq 0$. Comme $\lambda(1-t) > 0$, $\lambda > 0$
 et $1-t > 0$. Comme $1+\lambda > 0$, $\lambda \in]0;1[$.
 Comme $z \notin T$, $t \in [0;1]$ donc $t < 0$. D'où

$$g_1(z) = \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{t}_{<0} \underbrace{g_1(w)}_{>0} < 0.$$

2^e cas : $\lambda < 0$. Comme $(1-t)\lambda > 0$, $1-t < 0$ et $t > 1$.

D'où $g_1(z) = \underbrace{\lambda}_{<0} \underbrace{t}_{>0} \underbrace{g_1(w)}_{>0} < 0.$

c). Supposons $g_1(z) > 0$ et $g_3(z) > 0$. On a

$$0 < g_1(z) = \lambda t \underbrace{g_1(w)}_{>0} \text{ donc } \lambda t > 0$$

$$0 < g_3(z) = \lambda(1-t) \underbrace{g_3(w)}_{>0} \text{ donc } \lambda(1-t) > 0.$$

1^{er} cas : $\lambda \geq 0$. Comme $\lambda(1-t) > 0$, $\lambda > 0$
 et $1-t > 0$. Comme $\lambda t > 0$, $t > 0$.

D'où $t \in [0;1]$. Or $z \notin T$ donc $\lambda > 1$. D'où

$$g_2(z) = \underbrace{(1-\lambda)}_{<0} \underbrace{g_2(w)}_{>0} < 0.$$

2^e cas : $\lambda < 0$. Comme $\lambda t > 0$, $t < 0$ et
 Comme $\lambda(1-t) > 0$, $1-t < 0$ soit $t > 0$.

contr.

8- Correction de l'énoncé : lire

$$g_1(u + \lambda(w-v)) = \lambda g_1(w)$$

$$g_3(u + \lambda(w-v)) = -\lambda g_3(w)$$

Comme $g_1 - g_1(0)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, on a [7

$$\begin{aligned} g_1(u + \lambda(w-v)) &= g_1(u + \lambda(w-v)) - g_1(0) + g_1(0) \\ &= g_1(u) - g_1(0) + \lambda(g_1(w) - g_1(0)) - \lambda(g_1(v) - g_1(0)) + g_1(0) \\ &= g_1(u) + \lambda g_1(w) - \lambda g_1(v) + 0 = \lambda g_1(w) \end{aligned}$$

(car $g_1(u) = g_1(v) = 0$).

Comme $g_3 - g_3(0)$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, on a

$$\begin{aligned} g_3(u + \lambda(w-v)) &= g_3(u) - g_3(0) + \lambda(g_3(w) - g_3(0)) - \lambda(g_3(v) - g_3(0)) \\ &\quad + g_3(0) \\ &= g_3(u) + \lambda g_3(w) - \lambda g_3(v) + 0 = -\lambda g_3(v) \end{aligned}$$

car $g_3(u) = g_3(w) = 0$.

Soit $z \in \mathcal{D}_u$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq.

$z = u + \lambda(w-v)$ donc, par le calcul précédent, $g_1(z) = \lambda \underbrace{g_1(w)}_{\geq 0}$ et $g_3(z) = -\lambda \underbrace{g_3(v)}_{\geq 0}$.

Supposons $g_1(z) > 0$. Dans ce cas $\lambda > 0$ donc $g_3(z) < 0$.

g. D'après 6.3, on a

$$T \setminus S \subset \bigcap_{j=1}^n g_j^{-1}([0, +\infty[) = \emptyset$$

Soit $z \in J$. Par 7, $z \in (T \setminus S \cup D_u)$.

18

Par 8, $z \notin D_u$ donc $z \in T \setminus S$.

Donc $J \subset T \setminus S$.

Concl : $J = T \setminus S$.

10 - On a $g_1 = f_1 \operatorname{sgn}(f_1(u))$, $g_2 = f_2 \operatorname{sgn}(f_2(u))$
et $g_3 = f_3 \operatorname{sgn}(f_3(u))$.

On a

$z \in g_1^{-1}(]0, +\infty[) \Leftrightarrow f_1(z) \operatorname{sgn}(f_1(u)) > 0$

$(\Rightarrow) f_1(z) \neq 0$ et $\operatorname{sgn}(f_1(z)) = \operatorname{sgn}(f_1(u))$.

$(\Rightarrow) z \in U_1$

On a

$z \in g_2^{-1}(]0, +\infty[) \Leftrightarrow f_2(z) \operatorname{sgn}(f_2(u)) > 0$

$(\Rightarrow) f_2(z) \neq 0$ et $\operatorname{sgn}(f_2(z)) = \operatorname{sgn}(f_2(u))$

$(\Rightarrow) z \in U_2$

On a

$z \in g_3^{-1}(]0, +\infty[) \Leftrightarrow f_3(z) \operatorname{sgn}(f_3(u)) > 0$

$(\Rightarrow) f_3(z) \neq 0$ et $\operatorname{sgn}(f_3(z)) = \operatorname{sgn}(f_3(u))$.

$(\Rightarrow) z \in U_3$.

Par 9, $T \setminus S = J = \bigcap_{j=1}^3 U_j$.

11 - Les fct. g_j sont de la forme du 3. 19
 Elles sont conti. Comme $[0; +\infty[$ est
 un ouvert, $g_j^{-1}([0; +\infty[)$ est un ouvert.

Donc $T \setminus S = \bigcap_{j=1}^3 g_j^{-1}([0; +\infty[)$ est un ouvert
 (intersection finie
 d'ouverts).

Soit $(z; z') \in (T \setminus S)^2$ et $t \in [0; 1]$.

Pour $j \in \{1; 2; 3\}$, on a, d'après 3,

$$g_j(tz' + (1-t)z) = \underbrace{tg_j(z')}_{>0} + (1-t)\underbrace{g_j(z)}_{>0} > 0.$$

par hyp. car t
et $(1-t)$

Donc $tz' + (1-t)z \in \bigcap_{j=1}^3 g_j^{-1}([0; +\infty[) = T \setminus S.$
ne peuvent
être nul en
m. temps.

Donc $T \setminus S$ est convexe.

12 - Comme T est compact, T est fermé.

Comme $T \setminus S \subset T$, $\overline{T \setminus S} \subset T.$

Soit $z \in T.$

1^{er} cas: $z \in T \setminus S.$ Comme $T \setminus S \subset \overline{T \setminus S}$, $z \in \overline{T \setminus S}.$

2^è cas: $z \in [0; +\infty[.$ Il existe $t \in [0; 1] - t_0$, $z = r_{t_0}.$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $z_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n t_{(1-\frac{1}{n+1})} + \frac{1}{n+1} u \in T \setminus S.$
 (q.1)

Comme $z_n \rightarrow z$, $z \in \overline{T \setminus S}.$

3^e cas: $z \in [u; w]$. Il existe $\lambda \in [0; 1]$ tq.

$$z = \lambda w + (1-\lambda)u. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit}$$

$$z_n = \lambda \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) w + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) (1-\lambda)u \in T \setminus S \quad (cf. 1)$$

Comme $z_n \rightarrow z$, $z \in \overline{T \setminus S}$.

4^e cas: $z \in [u; v]$. Il existe $\lambda \in [0; 1]$ tq.

$$z = \lambda v + (1-\lambda)u. \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ soit}$$

$$z_n = \lambda \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) v + \frac{1}{n+1} + (1 - \frac{1}{n+1}) (1-\lambda)u \in T \setminus S \quad (cf. 1).$$

Comme $z_n \rightarrow z$, $z \in \overline{T \setminus S}$.

Donc $T \subset \overline{T \setminus S}$. Dne $T = \overline{T \setminus S}$.

Comme $T \setminus S$ est convexe, $T = \overline{T \setminus S}$ est convexe par le cours.

13 - Soit $z \in S$. Il existe $j \in \{1; 2; 3\}$ tq.

$g_j(z) = 0$. Il existe $(a_j; b_j; c_j) \in \mathbb{R}^3$ tq.

$$\forall z' \in \mathbb{C}, g_j(z') = a_j \operatorname{Re}(z') + b_j \operatorname{Im}(z') + c_j.$$

Dne $g_j(0) = c_j$ et, pour $z' \in \mathbb{C}$,

$$g_j(z') - g_j(0) = a_j \operatorname{Re}(z') + b_j \operatorname{Im}(z') = \langle z', a + ib \rangle.$$

On suppose que $z \in T$. Il existe $r > 0$ tq.

$$D(z; r) \subset T. \text{ Soit } z_1 = z - \frac{r}{2} \frac{a+ib}{|a+ib|}.$$

On a $z_1 \in D(z; r) \subset T$ donc $z_1 \in T$.

Comme $\overline{T \setminus S} = T$, il existe une suite 11
 $(w_n)_n \in (T \setminus S)^\omega$ t.q. $w_n \rightarrow z_1$. Comme g_j
 est conti. $g_j(w_n) \rightarrow g_j(z_1)$. Comme g_j partant de
 $g_j(w_n) \geq 0$ (y. 6), on obtient par passage
 à la limite $n \rightarrow \infty$, $g_j(z_1) \geq 0$. Or

$$g_j(z_1) = g_j(0) + \langle z_1; a+ib \rangle$$

lue

$$g_j(z_1) = g_j(0) + \langle z_1; a+ib \rangle - \frac{\epsilon}{2} |a+ib|$$

$$= g_j(z) - \frac{\epsilon}{2} |a+ib| = -\frac{\epsilon}{2} |a+ib| < 0.$$

Contr. Dne $z \notin \overset{\circ}{T}$.

14 - Comme $T \setminus S$ est ouvert et $T \setminus S \subset T$,
 on a $T \setminus S \subset \overset{\circ}{T}$. D'après 13, si $z \in \overset{\circ}{T}$,
 $z \notin S$ d'ne $z \in \overset{\circ}{T} \setminus S \subset T \setminus S$. D'nn $\overset{\circ}{T} \subset T \setminus S$.

Conclusion: $T \setminus S = \overset{\circ}{T}$.

15 - a) Soit $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto tz + (1-t)z_0$

Soit $A = \{t \geq 1; \gamma(t) \in T \setminus S\}$. On a $1 \in A$

Car $\gamma(1) = z \in T$. Comme T est borné,
 il existe $R > 0$ t.q. $T \subset D(z_0; R)$.

Pour $t \geq 0$, on a $|\gamma(t) - z_0| = t|z - z_0| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$

donc il existe $t_4 > t_3$.

12

$$t > t_3 \Rightarrow x(t) \notin D(z_0; R].$$

Donc A est majoré. Soit $r = \sup A \in \mathbb{R}$.

Supposons : $x(t) \in T \setminus S$. Comme

$T \setminus S$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tq.

$D(x(r), \delta) \subset T \setminus S$. Comme x est conti.
en r , il existe $\delta > 0$;

$$|t - r| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(r)| < \delta.$$

$$\text{Dne } x(r + \frac{\delta}{2}) \in D(x(r), \delta) \text{ dne } x(r + \frac{\delta}{2}) \in T \setminus S$$

dne $r + \frac{\delta}{2} \in A$. Contr. avec la déf. de r .

Dne $x(r) \notin T \setminus S$. Comme r est limite d'une
suite d'élé. de A , et comme x est conti. en r ,
 $x(r)$ est limite d'une suite d'élé. de $T \setminus S$.

Dne $x(r) \in \overline{T \setminus S}$.

$$\text{D'où } x(r) = \overline{T \setminus S} \setminus (T \setminus S) = T \setminus (T \setminus S) = S$$

q. p. preuve de 12.

$$\text{Soit } z_1 = x(r). \text{ Dne } rz + (1-r)z_0 = z_1$$

$$\text{et, comme } r \geq 1, z = \frac{z_1}{r} - \frac{1-r}{r}z_0 = \frac{z_1}{r} + (1-\frac{1}{r})z_0.$$

Pour $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} tz + (1-t)z_0 &= t(\frac{z_1}{r} + (1-\frac{1}{r})z_0) + (1-t)z_0 = \frac{t}{r}z_1 + (t(1-\frac{1}{r}) + (1-t))z_0 \\ &= \frac{t}{r}z_1 + (1-\frac{t}{r})z_0 \end{aligned}$$

avec $\frac{t}{r} \in [0, 1]$ car $r \geq 1$. Dne $[z_0, z] \subset [z_0, z_1]$.

b). Soit $z \in T$.

113

Si $z \in S$ alors, comme $S \subset \Omega$, $z \in \Omega$.

Si $z \in T \setminus S$ alors, par a), il existe

$z_1 \in S$ tq. $[z_0, z] \subset [z_0, z_1]$. (*)

Comme $z_1 \in S$ et $S \subset \Omega$, $z_1 \in \Omega$.

Comme Ω est étoilé par rapport à z_0 ,

$[z_0, z_1] \subset \Omega$. Dnc, par (*),

$z \in [z_0, z] \subset \Omega$.

Concl: $T \subset \Omega$.