a). Montrer que

$$L(\tau) \;=\; \sum_{k=0}^{p} L\big(\sigma^{(k)}\big)\;.$$

b). En déduire que

$$L(\gamma) \;\geq\; \sum_{k=1}^{p} L\big(\gamma_{|[\sigma_{k-1};\sigma_k]}\big)\;.$$

c). Montrer que

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{k=1}^{p} L\big(\gamma_{|[\sigma_{k-1};\sigma_k]}\big)\;.$$

(Indication : pour une subdivision $\underline{\sigma}$ de $[a;b]$, appliquer a) à $\tau = \underline{\sigma} \cup \sigma$.)

5. On suppose que γ est de classe C^1 sur $[a;b]$.

a). Montrer que $L(\gamma)$ est finie et que

$$L(\gamma) \;\leq\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\;.$$

correction

b). Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\,(t;t') \in [a;b]^2\,,\quad |t\,-\,t'| \,<\, \delta \;\Longrightarrow\; \big|\gamma'(t)\,-\,\gamma'(t')\big| \,<\, \frac{\epsilon}{2(b-a)}\;. \tag{11}$$

(Indication : on pourra utiliser l'exercice 15.)

c). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(b-a) < n\delta$ (par exemple $n = E((b-a)/\delta)+1$). On définit une subdivision σ de $[a;b]$ par $\sigma : [\![0;n]\!] \longrightarrow [a;b]$ avec, pour $j \in [\![0;n]\!]$,

$$\sigma_j \;:=\; a \,+\, j\,\frac{b-a}{n}\;.$$

Montrer que

$$\left|\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \;-\; \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\,-\,\sigma_{j-1})\,\big|\gamma'(\sigma_{j-1})\big|\right| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{12}$$

d). Montrer que

$$\left|L(\sigma) \;-\; \sum_{j=1}^{n}(\sigma_j\,-\,\sigma_{j-1})\,\big|\gamma'(\sigma_{j-1})\big|\right| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}\,. \tag{13}$$

e). En déduire que

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \;-\; \epsilon \;\leq\; L(\sigma) \;\leq\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{14}$$

correction

f). Montrer que

$$L(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{15}$$

6. On suppose que γ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[a;b]$. D'après l'exercice 20, γ est, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, une concaténation

$$(\mathring{+})_{j=1}^{n}\,\gamma_j$$

où, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\gamma_j : [a_j; b_j] \longrightarrow \mathbb{C}$ est C^1. Montrer que

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{j=1}^{n} L\big(\gamma_j\big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} |\gamma_j'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{16}$$

Remarque : On a défini la longueur $L(\gamma)$ d'une courbe $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ lorsque $a < b$. Lorsque qu'une telle courbe est constante, on remarque que sa longueur est nulle. Il est donc naturel de poser $L(\gamma) = 0$ lorsque $a = b$.
On s'est attaché dans cet exercice à définir la longueur de γ. On souhaite définir aussi la longueur de $\mathcal{I} = \gamma([a;b])$, l'image de γ. Pour ce faire, des précautions s'imposent comme le montre l'exemple suivant.
Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $z_1 \neq z_2$. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que la restriction $\gamma_{|[a;c]}$ de γ à $[a;c]$ (avec $a < c < b$) soit un paramétrage dans un certain sens du segment $[z_1; z_2]$ et telle que la restriction $\gamma_{|[c;b]}$ de γ à $[c;b]$ soit un paramétrage du même segment $[z_1; z_2]$ mais parcouru dans l'autre sens. Alors $\mathcal{I} = [z_1; z_2]$ mais $L(\gamma)$ est deux fois la longueur $|z_1 - z_2|$ du segment $[z_1; z_2]$.
On suppose que la restriction de γ à $[a;b[$ est injective. Dans ce cas, il est naturel de définir la longueur de $\mathcal{I}$ par $L(\gamma)$. Mais est-on sûr que, pour toute courbe $\tau : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\tau([c;d]) = \mathcal{I}$ et telle que la restriction de τ à $[c;d[$ soit injective, on a bien $L(\tau) = L(\gamma)$? Lorsque de telles courbes γ et τ sont des chemins équivalents ou bien opposés, on verra dans l'exercice 28 que $L(\gamma) = L(\tau)$. Mais est-on sûr que de tels chemins γ et τ sont forcément équivalents ou opposés ? Ce n'est pas clair du tout.

Exercice 45. : Soit Ω un ouvert non vide connexe par arcs de $\mathbb{C}$. On montre ici que Ω est connexe par lignes polygônales. Si $\Omega = \mathbb{C}$, le résultat est clairement vrai, puisque $\mathbb{C}$ est convexe. On se restreint au cas où $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ une courbe continue. D'après l'exercice 15, on sait que γ est uniformément continue sur $[a;b]$ c'est-à-dire

$$\forall\,\epsilon > 0\,,\quad \exists\,\delta > 0\,;\quad \forall\,(t;t') \in [a;b]^2\,,\quad \big(|t - t'| < \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon\big)\,. \tag{17}$$

Comme $[a;b]$ est compact et γ est continue, on sait, par le cours, que $\gamma([a;b])$ est compact. D'après l'exercice 14, on sait que

$$\rho \;:=\; \inf\big\{|\gamma(t) - z|\,;\; t \in [a;b]\,,\, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\big\} \;>\; 0\,.$$