

Ex. 44.

1

1. Comme $\sigma \in \mathcal{C}$, on a $\{\sigma_j; 0 \leq j \leq m\} \subset \{z_k; 0 \leq k \leq n\}$
 et comme les σ_j sont $z \neq z$,
 z_n

$$m+1 = \text{card}\{\sigma_j; 0 \leq j \leq m\} \leq \text{card}\{z_k; 0 \leq k \leq n\} = n+1$$

d'où $m \leq n$. De plus, il existe

$0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$ t.q., pour $0 \leq j \leq m$,

$$\sigma_j = z_{k_j}. \text{ Donc}$$

$$L(\sigma) = \sum_{j=1}^m |\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^m |\gamma(z_{k_j}) - \gamma(z_{k_{j-1}})|.$$

Or, pour tout j ,

$$|\gamma(z_{k_j}) - \gamma(z_{k_{j-1}})| = \left| \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} (\gamma(z_l) - \gamma(z_{l-1})) \right| \leq \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} |\gamma(z_l) - \gamma(z_{l-1})|$$

donc

$$L(\sigma) \leq \sum_{j=1}^m \sum_{l=k_{j-1}+1}^{k_j} |\gamma(z_l) - \gamma(z_{l-1})| = \sum_{k=1}^n |\gamma(z_k) - \gamma(z_{k-1})| = L(z).$$

2. On a

$$|b-a| = |\gamma(\sigma_n) - \gamma(\sigma_0)| = \left| \sum_{k=1}^n (\gamma(\sigma_k) - \gamma(\sigma_{k-1})) \right| \leq \sum_{k=1}^n |\gamma(\sigma_k) - \gamma(\sigma_{k-1})| = L(\sigma)$$

3. $\{\sigma_j^{(1)}; 0 \leq j \leq n_1\}$ est fini de card. n_1+1
 $\{\sigma_j^{(2)}; 0 \leq j \leq n_2\}$ n_2+1

donc U est fini. Comme $a_1 \leq \sigma_j^{(1)} \leq b_1$ et $a_2 \leq \sigma_j^{(2)} \leq b_2$,
 pour tout j , les él. de U appartiennent à
 $[\min(a_1, a_2); \max(b_1, b_2)]$.

Si $\{\sigma_j^{(1)}; 0 \leq j \leq n_1\} \cap \{\sigma_j^{(2)}; 0 \leq j \leq n_2\} = \emptyset$ alors

2

$$p = n_1 + 1 + n_2 + 1 = n_1 + n_2 + 2.$$

Si non, $p < n_1 + n_2 + 2$.

Comme $\{\sigma_j^{(1)}; 0 \leq j \leq n_1\} \subset U$, on a $n_1 + 1 \leq p$
 — $\{\sigma_j^{(2)}; 0 \leq j \leq n_2\} \subset U$, — $n_2 + 1 \leq p$

donc $p \geq \max(n_1, n_2) + 1$.

Soit $U = \{u_j; 1 \leq j \leq p\}$. Soit $s \in \{1, 2\}$. Il existe $1 \leq k_1^{(s)} < \dots < k_{n_s}^{(s)} \leq p$ tq. $\sigma_j^{(s)} = u_{k_j^{(s)}}$, pour

$1 \leq j \leq n_s$. Comme

$$|\gamma(\sigma_j^{(s)}) - \gamma(\sigma_{j-1}^{(s)})| \leq \sum_{\ell=k_{j-1}^{(s)}+1}^{k_j^{(s)}} |\gamma(u_\ell) - \gamma(u_{\ell-1})|$$

$$\text{on a } L(\sigma^{(s)}) \leq \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{\ell=k_{j-1}^{(s)}+1}^{k_j^{(s)}} |\gamma(u_\ell) - \gamma(u_{\ell-1})| = L(\sigma \cup \tau).$$

$$\text{Donc } \max(L(\sigma^{(1)}), L(\sigma^{(2)})) \leq L(\sigma \cup \tau).$$

4. a). La subdiv. τ est

$$a = \sigma_0^{(1)} < \dots < \sigma_{n_1}^{(1)} = \sigma_0^{(2)} < \dots < \sigma_{n_2}^{(2)} = \sigma_0^{(3)} < \dots < \sigma_{n_{p-1}}^{(p-1)} = \sigma_0^{(p)} < \dots < \sigma_{n_p}^{(p)} = b.$$

$$\text{Donc } L(\tau) = \sum_{j=1}^p \sum_{\ell=1}^{n_j} |\gamma(\sigma_\ell^{(j)}) - \gamma(\sigma_{\ell-1}^{(j)})| = \sum_{j=1}^p L(\sigma^{(j)}).$$

b). Soit $\varepsilon > 0$. Soit $1 \leq k \leq p$. Par def. de $L(\gamma|[\sigma_{n_{k-1}}, \sigma_k])$, il existe une subdiv.

$\sigma^{(k)}$ de $[\sigma_{k-1}; \sigma_k]$ t.g.

(3)

$$L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]) - \frac{\varepsilon}{p} < L(\sigma^{(k)}) \leq L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]) \quad (*)$$

Soit $z = \bigcup_{k=1}^p \sigma^{(k)}$. C'est une subdiv. de $[a; b]$.

On a $L(\gamma) \geq L(z)$. Par 4.a) et (*),

$$L(\gamma) \geq \sum_{k=1}^p L(\sigma^{(k)}) \geq \sum_{k=1}^p L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]) - \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$L(\gamma) \geq \sum_{k=1}^p L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]).$$

c). Soit $\underline{\sigma}$ une subdiv. de $[a; b]$ et $z = \underline{\sigma} \cup \sigma$.

Par 3., $L(\underline{\sigma}) \leq L(z)$. z est la subdiv.

$a_0 = t_0 = \sigma_0 < t_1 < \dots < t_{n_1} = \sigma_1 < t_{n_1+1} < \dots < t_{n_1+n_2} = \sigma_2 < \dots < t_{n_1+n_2+\dots+n_{p-1}} = \sigma_{p-1} < t_{n_1+n_2+\dots+n_p} = \sigma_p = b$,
pour des $n_1, \dots, n_p$ t.g. $m = \sum_{k=1}^p n_k$ est la taille de z .

Soit $\sigma^{(k)}$: $\sigma_{k-1} = t_{\sum_{j=1}^{k-1} n_j} < \dots < t_{\sum_{j=1}^k n_j} = \sigma_k$.

C'est une subdiv. de $[\sigma_{k-1}; \sigma_k]$. Par 4.a),

$L(z) = \sum_{k=1}^p L(\sigma^{(k)})$ et, pour tout k , par déf. de

$$L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]), \text{ on a } L(z) \leq \sum_{k=1}^p L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]).$$

$$\text{Donc } L(\underline{\sigma}) \leq \sum_{k=1}^p L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]).$$

Donc la dernière somme majore l'ensemble
 $\{L(\underline{\sigma}); \underline{\sigma} \text{ subdiv. de } [a; b]\}$ donc

$$L(\gamma) \leq \sum_{k=1}^p L(\gamma|[\sigma_{k-1}; \sigma_k]).$$

(4)

D'après 4.6), on obtient

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^n L(\gamma|[\sigma_{j-1}; \sigma_j]).$$

5.a). Soit $\sigma \in \mathcal{T}$ de taille n_σ . Comme γ est C^1 , on a

$$L(\sigma) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} |\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \left| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^{n_\sigma} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Cours.

Donc $\int_a^b |\gamma'(t)| dt$ majore $\{L(\sigma); \sigma \in \mathcal{T}\}$. D'où

$$L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

b). Par hyp., γ' est continue sur le compact $[a; b]$.
Par l'ex. 15, γ' est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\delta > 0$ t.q.

$$\forall (t, t') \in [a; b]^2, |t - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma'(t) - \gamma'(t')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

c). Par le cours,

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} |\gamma'(t)| dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \gamma'(t) dt - \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \gamma'(\sigma_{j-1}) \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} (\gamma'(t) - \gamma'(\sigma_{j-1})) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} |\gamma'(t) - \gamma'(\sigma_{j-1})| dt \leq \sum_{j=1}^n \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt \\ &\text{par l'ineg. triangulaire (cf. Ex. 2).} \end{aligned}$$

Pour $1 \leq j \leq n$, pour $t \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]$, on a $|t - \sigma_{j-1}| < \delta$ [5]
dnc, par (b),

$$|\gamma'(t) - \gamma'(\sigma_{j-1})| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

D'nc

$$\sup_{t \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} |\gamma'(t) - \gamma'(\sigma_{j-1})| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On a dnc

$$\left| \int_a^b \gamma'(t) dt - \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})| \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) = \frac{\varepsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

d). Par l'ing. triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \left| L(\gamma) - \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})| \right| &= \left| \sum_{j=1}^n (|\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})| - (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})|) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| |\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})| - (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})| \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1}) - (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \gamma'(\sigma_{j-1}) \right| \end{aligned}$$

$$\text{Or } \gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1}) - (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \gamma'(\sigma_{j-1}) = \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} (\gamma'(t) - \gamma'(\sigma_{j-1})) dt$$

et, comme au 5. c),

$$|\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1}) - (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \gamma'(\sigma_{j-1})| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\sigma_j - \sigma_{j-1})$$

dnc

$$\left| L(\gamma) - \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})| \right| \leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2}$$

e). Par def. de $L(\gamma)$, et par 5.a), on a

-16

$$L(\gamma) \leq L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

D'après 5.d),

$$L(\gamma) \geq \sum_{j=1}^n (\sigma_j - \sigma_{j-1}) |\gamma'(\sigma_{j-1})| = \frac{\varepsilon}{2}$$

et, par 5.c),

$$L(\gamma) \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \varepsilon.$$

f). D'après 5.c) et 5.a), on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt - \varepsilon \leq L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

d'où

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

6 - Comme $\gamma|_{[a_j, b_j]} = \gamma_j$, on a, par 4.c),

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^n L(\gamma_j).$$

Comme chaque γ_j est C^1 , on a, par 5.)

$$L(\gamma) = \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} |\gamma_j'(t)| dt.$$