

Ex. 51.

1

1 - On a

$$\tan(z) = w \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \times \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = w$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = iw$$

exp ne s'annule pas

$\Leftrightarrow$

$$\frac{e^{iz}(e^{iz} - e^{-iz})}{e^{iz}(e^{iz} + e^{-iz})} = iw$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = iw$$

$\Leftrightarrow$

$$Z = e^{2iz} \text{ et } Z \neq -1 \text{ et } \frac{Z-1}{Z+1} = iw.$$

2 - Soit $w \in \mathbb{C} \setminus i, iy$. Pour $Z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a

$$\frac{Z-1}{Z+1} = iw \Leftrightarrow Z(1-iw) = iw+1$$

faux si $w = -i = \frac{1}{i}$.

Donc pas de sol. à (1) si $w = -i$. Par 1, pas de sol. à $\tan(z) = i$.

Si $w = i$, $Z = 0$ est la seule sol. de (1).

D'après 1, $\tan(z) = i \Leftrightarrow 0 = e^{2iz}$
faux car exp ne s'annule pas.

Donc pas de sol. à $\tan(z) = i$.

3 - Par 1 et 2, sachant que $1-iw \neq 0$ et $1+iw \neq 0$,
 $z \in \mathcal{S}_w \Leftrightarrow (Z = e^{2iz} \text{ et } Z \neq -1 \text{ et } Z = \frac{1+iw}{1-iw})$

On remarque que $-1 = \frac{1+iw}{1-iw} \Leftrightarrow iw-1 = iw+1 \Leftrightarrow -1 = 1$
faux
donc $\frac{1+iw}{1-iw} \neq -1$. D'où

$$z \in \mathcal{I}_w \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{1+iw}{1-iw}.$$

12

Comme $\frac{1+iw}{1-iw} \in \mathbb{C}^*$ et comme $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est surj., il existe $z_w \in \mathbb{C}$; $\exp(2iz_w) = \frac{1+iw}{1-iw}$.

On a donc, par les prop. de $\exp$,

$$z \in \mathcal{I}_w \Leftrightarrow \exp(2iz) = \exp(2iz_w)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; 2iz = 2iz_w + 2k\pi i$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}; z = z_w + k\pi.$$

4- Comme $U \ni w \mapsto w+i$ est conti. et ne s'annule pas, Comme $U \ni w \mapsto w-i$ est conti. h est conti. par quotient (et produit).
Comme $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ est ouvert, $U = h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)$ l'est aussi.

Soit $r \in \mathbb{R}^+$ et $w \in U$. On a, comme $w+i \neq 0$,

$$h(w) = -r \Leftrightarrow \frac{w-i}{w+i} = r \Leftrightarrow w(1-r) = i(r+1)$$

Pour $r=1$, $h(w)=-1$ n'a pas de sol.

Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, on a

$$h(w) = -r \Leftrightarrow w = i \frac{r+1}{1-r}$$

on a $\frac{r+1}{1-r} \in \mathbb{R}$. Comme l'image de $[0,1[\ni r \mapsto \frac{r+1}{1-r}$ est $[1, +\infty[$,
on a, pour $r \in [0,1[$,

$$h(w) = -r \Leftrightarrow \exists t \in [1, +\infty[; w = it$$

Comme l'image de $]1, +\infty[\ni r \mapsto -\frac{r+1}{r-1}$ est $]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$,
on a, pour $r > 1$, $h(w) = -r \Leftrightarrow \exists t \in]-\infty, -1[; w = it.$

Donc, pour $w \in U$

$$w \in \Omega \Leftrightarrow w \in \mathbb{C} \setminus i[1; +\infty[\text{ et } w \in \mathbb{C} \setminus i]-\infty; -1]$$

et comme $-i \notin U$,

$$w \in \Omega \Leftrightarrow w \in \mathbb{C} \setminus i[1; +\infty[\text{ et } w \in \mathbb{C} \setminus i]-\infty; -1]$$

$$\Rightarrow w \in \mathbb{C} \setminus (i[1; +\infty[\cup i]-\infty; -1]),$$

5- Comme $w \mapsto w$ est holo, et $U \ni w \mapsto w+i$ ne s'annule pas, h est holo sur U donc sur Ω , par somme, quotient et produit.

Comme $h|_{\Omega}$ est à val. dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ où $\log$ est holo, f est holo, par composition.

De plus, pour $w \in \Omega$,

$$f'(w) = \frac{1}{2i} \frac{1}{h(w)} \times h'(w) = \frac{1}{-\frac{w-1}{w+i}} \times \frac{1}{2i} \frac{wti - (w-i)}{(wti)^2}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{wti}{w-i} \times \frac{2i}{(wti)^2} = \frac{1}{(w-i)(wti)} = \frac{1}{1+w^2}.$$

6- $\tan$ est bien déf. sur Ω_1 . Soit $w \in \Omega$.

Par le cours, $\log$ envoie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \in]-\pi; \pi[\}$

et, par 4, h envoie Ω sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Donc

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2i} \log(h(w))\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-i \log(h(w)))$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\log(h(w))) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[.$$

Donc $f(w) \in \Omega_1 \subset \Omega_0$. On a $2if(w) = \log(h(w))$
et $\exp(2if(w)) = h(w)$.

Par 3., $f(w) \in \mathcal{G}_w$ donc

$\tan(f(w)) = w$, On a montré
que $\tan|_{\Omega_1} \circ f = \text{id}_{\Omega_1}$.

Soit $z \in \Omega_1$.

Supp. $\tan(z) = -i$. Alors $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = -i$

donc $e^{iz} - e^{-iz} = e^{iz} + e^{-iz}$ d'où $2e^{-iz} = 0$. Contr.,
car exp ne s'annule pas. Donc $\tan z \in U$ et
 $h(\tan(z))$ est bien déf.

Supp. qu'il existe $r \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ t.q.

$\tan(z) = ri$. Alors

$$e^{iz} - e^{-iz} = (e^{iz} + e^{-iz})(-r)$$

$$\text{d'où } e^{2iz} - 1 = (e^{2iz} + 1)(-r)$$

$$e^{2iz}(1+r) = 1-r$$

$$\text{d'où } e^{2iz} \in \mathbb{R}$$

$$\text{d'où } 2\text{Re}(z) \in \pi\mathbb{Z}. \text{ Or } -\frac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}$$

donc $\text{Re}(z) = 0$ et, par lex. 5, $\tan(z) = 0$

Contr. avec $\tan(z) = ri$.

D'où $\tan(z) \in h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-) = \Omega$

par 4. Donc $f(\tan(z))$ est bien déf. et

$$f(\tan(z)) = \frac{1}{2i} \text{Log}(h(\tan(z))).$$

Comme $\exp(2i f(\tan(z))) = h(\tan(z))$ [5]

on a, par la preuve de 3 avec w remplacé par $\tan(z)$,
 $f(\tan(z)) = z$.

Donc $f \circ \tan|_{\Omega_1} = \text{id}|_{\Omega_1}$.

Donc f est bij et $\tan|_{\Omega_1}$ est sa
 bij. réc.

7- on a $\mathbb{R} \subset \Omega$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2i} \log(h(t)) = \frac{1}{2i} (\ln|h(t)| + i \text{Arg}(h(t)))$$

or $|h(t)| = \left| \frac{t-i}{t+i} \right| = 1$ et $h(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ donc

$$f(t) = \frac{1}{2} \text{Arg}(h(t)) = \frac{1}{2} 2 \text{Arctan} \left(\frac{\text{Im} h(t)}{|h(t)| + \text{Re} h(t)} \right)$$

(cf. ex. 9), On a

$$\begin{aligned} h(t) &= - \frac{t-i}{t+i} = - \frac{(t-i)^2}{(t+i)^2} = - \frac{t^2 - 2it - 1}{t^2 + 1} \\ &= - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} + i \frac{2t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(t) &= \text{Arctan} \left(\frac{2t/(t^2+1)}{1 - \frac{t^2-1}{t^2+1}} \right) = \text{Arctan} \left(\frac{2t}{t^2+1 - (t^2-1)} \right) \\ &= \text{Arctan}(t). \end{aligned}$$