

Ex. 55.

1. Pour $z \in \Omega$, on a, par σ -dérivation,

$$2g(z)g'(z) = 1.$$

Donc $g(z) \neq 0$. Si on avait $0 \in \Omega$, on aurait

$$0 = g(0)^2 \neq 0. \text{ Contr.}$$

2 - a) Soit $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^*$. Si $g(z) = 0$, $z = g(z)^2 = 0$.

Contr. Donc g ne s'annule pas.

Comme $g(re^{i\theta}) \neq 0$, il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tq.

$$g(re^{i\theta}) = |g(re^{i\theta})| e^{i\sigma}. \text{ or } re^{i\theta} = g(re^{i\theta})^2$$

donc

$$|g(re^{i\theta})|^2 e^{2i\sigma} = re^{i\theta}$$

donc

$$|g(re^{i\theta})| = \sqrt{r} \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tq.}$$

$$2\sigma = \theta + 2k\pi.$$

$$\text{On a donc } g(re^{i\theta}) = \sqrt{r} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}$$

$$\text{Soit } g(re^{i\theta}) = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ si } k \text{ pair} \\ = -\sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \text{ si } k \text{ impair.}$$

b). Soit $(z, z') \in \Omega^2$ tq. $g(z) = g(z')$. On a

$$z = g(z)^2 = g(z')^2 = z'. \text{ Donc } g \text{ est injective.}$$

c). Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il

existe $r, \delta > 0$ tq. $D(z_0; r) \subset \Omega$.

Pour $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, on a, comme g est inj., 12
 $g(z) \neq g(z_0)$ donc

$$\frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{g(z)^2 - g(z_0)^2}{g(z) - g(z_0)} = g(z) + g(z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 2g(z_0) \neq 0$$

(car g est conti. en z_0 par hyp.)

Par inversion,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{2g(z_0)}.$$

Donc g est holo. en z_0 . Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \mathbb{R}$, g est holo. sur $\mathbb{R}$ et

$$g' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{2g(z)}.$$

3 - a) Par 2, g est holo. Comme $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ est holo,
Comme $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ est holo,

$h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ est holo. par composition,
 $z \mapsto \frac{g(z^2)}{z^2}$ et quotient

$$\text{et } h'(z) = \frac{g'(z^2) 2z \times z - g(z^2)}{z^2} = \frac{\frac{2z^2}{2g(z^2)} - g(z^2)}{z^2} = \frac{z^2 - g(z^2)^2}{z^2 g(z^2)} = 0.$$

Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs, h est cte par le cours.

Il existe donc $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $c = h(z)$

$$\text{soit } g(z^2) = cz.$$

b) On a

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(re^{it}) r i e^{it} dt = 2ir \int_0^{2\pi} g(re^{i\frac{t}{2}}) e^{i2\frac{t}{2}} \frac{1}{2} dt$$

$$\stackrel{\text{changement de var.}}{=} 2ir \int_0^{\pi} g(re^{iu}) e^{iu} du$$

13

Donc, par a),

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} g(z) dz &= 2i\pi \int_0^\pi g((\sqrt{r}e^{is})^2) e^{i2s} ds \\ &= 2i\pi \int_0^\pi c \sqrt{r} e^{is} e^{i2s} ds \\ &= 2icr\sqrt{r} \int_0^\pi e^{i3s} ds = 2icr\sqrt{r} \left[\frac{e^{i3s}}{3i} \right]_0^\pi \\ &= 2icr\sqrt{r} \left(-1 - 1 \right) = -\frac{4}{3} cr\sqrt{r}. \end{aligned}$$

c). Soit $G: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{2}{3} z g(z)$. Comme g est holo.,
 G est holo. par produit et, d'après 2.c),
 $G'(z) = \frac{2}{3} (g(z) + z g'(z)) = \frac{2}{3} \left(g(z) + \frac{z}{2g(z)} \right)$
 $= \frac{2g(z)^2 + z}{3g(z)} = \frac{3z}{3g(z)} = g(z)$
 car $g(z)^2 = z$. Donc G est une primitive de g .

d). Comme g admet une primitive sur $\mathbb{C}^*$
 et comme γ est fermé, $\int_{\gamma} g = 0$ par le cours.
 Contr. avec b) car $cr\sqrt{r} \neq 0$.

4 - Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$
 donnée par $g(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{-\pi/2}(z)\right)$.

Par le cours $\text{Log}_{-\pi/2}$ est holo. et $\exp$ aussi donc
 g est holo. par composition. Par le cours, g est conti.
 De plus, pour $z \in \Omega$, on a, par les prop. de $\exp$,
 $g(z)^2 = \exp(\text{Log}_{-\pi/2}(z)) = z$, par le cours.

On a $-1 = e^{i\pi} \notin \mathbb{R}^+ e^{-i\pi/2}$ (car $\pi - (-\frac{\pi}{2}) \notin 2\pi\mathbb{Z}$) 14

$$\text{Log}_{-\frac{\pi}{2}}(-1) = \ln(1-1) + i \text{Arg}_{-\frac{\pi}{2}}(-1) = 0 + i\pi$$

car $\pi \in]-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi]$.

D'in $g(-1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Enfin, pour $t > 0$,

$$\text{Log}_{-\frac{\pi}{2}}(t) = \ln(t) + i \text{Arg}_{-\frac{\pi}{2}}(t) = \ln(t)$$

car $0 \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi]$. D'in

$$g(t) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln(t)\right) = \exp(\ln \sqrt{t}) = \sqrt{t}.$$

5- Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ et $g: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

donnée par $g(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \text{Log}_{-3\pi/2}(z)\right)$.

Par le cours, $\text{Log}_{-3\pi/2}$ est holo. et exp. aussi.
donc g est holo. donc conti. par compo.

Pour $z \in \Omega$, on a

$$g(z)^2 = \exp(\text{Log}_{-3\pi/2}(z)) = z$$

par le cours.

On a $-1 = e^{i\pi} \notin \mathbb{R}^+ e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ (car $\pi + \frac{3\pi}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z}$).

$$\begin{aligned} g(-1) &= \exp\left(\frac{1}{2} (\ln|-1| + i \text{Arg}_{-3\pi/2}(-1))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} (0 + i(-\pi))\right), \quad \text{Car } -\pi \in]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2} + 2\pi] \\ &= e^{-i\pi/2} = -i. \end{aligned}$$

En fin, pour $t > 0$, $g(t) = \exp\left(\frac{1}{2} (\ln t + i0)\right)$ car $0 \in]-\frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2} + 2\pi]$
 $= \exp(\ln \sqrt{t}) = \sqrt{t}.$