

Ex. 70.

1

1. On suppose que f ne s'annule pas.
a). Comme f est C_h^1 et ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est C_h^1 par inversion. Par (18), il existe $R_1 > 0$ t.q.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R_1 \Rightarrow |f(z)| > 1. (*)$$

Dnc, pour $z \in \mathbb{C} \setminus D(0; R_1]$, $|f(z)| > 1$ et $\frac{1}{|f(z)|} < 1$.

Comme $D(0; R_1]$ est compact et $\frac{1}{f}$ est C_h^1 dnc continue $\sup_{D(0; R_1]} \frac{1}{|f|} < +\infty$.

$$\text{Soit } B = \max\left(1; \sup_{D(0; R_1]} \frac{1}{|f|}\right).$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \in D(0; R_1]$, $\frac{1}{|f(z)|} \leq \sup_{D(0; R_1]} \frac{1}{|f|} \leq B$
et si $z \notin D(0; R_1]$, $\frac{1}{|f(z)|} < 1 \leq B$.

Dnc $\frac{1}{f}$ est bornée.

2. Comme $\frac{1}{f}$ est C_h^1 et bornée sur $\mathbb{C}$ (d.a.)
 $\frac{1}{f}$ est cte par le théorème de Liouville.

Il existe donc $c \in \mathbb{C}^* \cap \mathbb{R}$, $\frac{1}{f} = c$.

Soit $M > \frac{1}{|c|}$. Par (18), il existe $R > 0$ t.q.

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M.$$

Dnc, pour $z \in \mathbb{C} \setminus D(0; R]$, $\frac{1}{|c|} = |f(z)| > M$. Gutr.

2- D'après (*), ma, par $R = R_1$ 12
et $z \in \mathbb{C} \setminus D(0; R]$, $|f(z)| > 1$ donc $f(z) \neq 0$.

3- Soit $Z(f) = f^{-1}(0)$. Par 2, f est non nulle.
Comme f est C_h^2 , f est analytique par le cours.
Par le principe des zéros isolés, $Z(f)$ est discret.

Par 2, $Z(f) = Z(f) \cap D(0; R]$.

Par le cours, $Z(f) \cap D(0; R]$ est fini car $D(0; R]$ est compact. Donc $Z(f)$ est fini.

4- $Z(f) = \{x_1; \dots; x_m\}$ avec $m \geq 1$
et, par $1 \leq j \neq k \leq m$, $x_j \neq x_k$.

a). Soit $1 \leq j \leq m$. Par le cours, il existe $\tilde{r}_j > 0$
et $g_j : D(x_j; \tilde{r}_j[\rightarrow \mathbb{C}^*$ analytique tq.

$$\forall z \in D(x_j; \tilde{r}_j[, f(z) = g_j(z)(z - x_j)^{n_j}. \quad (**)_j$$

Soit $r = \min \{ |x_k - x_j|; (j, k) \in ([1; m] \cap \mathbb{N})^2, j \neq k \} > 0$.

Par $1 \leq j \leq m$, soit $r_j = \min(\tilde{r}_j; \frac{r}{2}) > 0$.

Comme $r_j \leq \tilde{r}_j$, on a, par $(**)_j$,

$$\forall z \in D(x_j; r_j[, f(z) = g_j(z)(z - x_j)^{n_j}. \quad (***)_j$$

Soit $(j, k) \in ([1; m] \cap \mathbb{N})^2$ avec $j \neq k$. Comme

$$r_j \leq \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2}|x_j - x_k| \text{ et } r_k \leq \frac{r}{2} \leq \frac{1}{2}|x_j - x_k|,$$

$$D(x_j; r_j[\cap D(x_k; r_k[= \emptyset. \quad \square$$

On a donc

B

$$\mathbb{C} = \left(\bigcup_{j=1}^m D(\alpha_j; \frac{r_j}{2}) \right) \cup \underbrace{\left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^m D(\alpha_j; \frac{r_j}{2}) \right)}_{\Omega},$$

($\cup$: réunion disjointe)

Soit $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^m (z - \alpha_k)^{n_k}} & \text{si } z \in \Omega \\ \frac{g_j(z)}{\prod_{k \neq j}^m (z - \alpha_k)^{n_k}} & \text{si } z \in D(\alpha_j; \frac{r_j}{2}) \end{cases}$$

g est bien déf. car, pour $h \neq j$, $z - \alpha_h$ ne s'annule pas sur $D(\alpha_j; \frac{r_j}{2})$ et $z - \alpha_j$ ne s'annule pas sur Ω . g ne s'annule pas car chaque g_j ne s'annule pas et f ne s'annule pas sur Ω .

Par définition de g sur Ω , l'égalité de (19)

est valide sur Ω . Pour $1 \leq j \leq m$ et

$z \in D(\alpha_j; \frac{r_j}{2})$, on a, par (***)_j,

$$\left(\prod_{k=1}^m (z - \alpha_k)^{n_k} \right) g(z) = g_j(z) (z - \alpha_j)^{n_j} = f(z).$$

Donc l'égalité de (19) est valable sur les $D(\alpha_j; \frac{r_j}{2})$.

Il reste à montrer que g est C_h^1 .

On sait que f est C_h^1 et les fact. polynômes

aussi (cf. Gours), Dne, par quotient, g est C_h^1 sur Ω . Soit $1 \leq j \leq m$. (4)

Comme g_j est analytique, g_j est C_h^1 par le cours. Donc, par quotient, g est C_h^1 sur $D(x_j; \frac{r_j}{2})$. Soit $\Omega_j = D(x_j; r_j) \setminus D(x_j; \frac{r_j}{2})$. Pour tout k , $z - x_k$ ne s'annule pas sur Ω_j (cf. $\square$). Par (19), pour $z \in \Omega_j$,

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^m (z - x_k)^{n_k}}$$

et g est C_h^1 sur Ω_j par quotient.

On a montré que g est C_h^1 sur Ω .

b). Comme g est continue et ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est continue. Comme $D(0; R_1]$

est un compact, $M_1 := \sup_{D(0; R_1]} \frac{1}{|g|} < +\infty$.

Soit $M = \max(M_1; 1; \sup_{1 \leq j \leq m} |x_j|) \geq 1$.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus D(0; R_1]$, on a, par (*),

$$\left| \frac{1}{g(z)} \right| = \left| \frac{1}{f(z)} \right| \prod_{j=1}^m |z - x_j|^{n_j} \leq \prod_{j=1}^m |z - x_j|^{n_j}.$$

Pour $1 \leq j \leq m$, $|z - x_j| \leq |z| + |x_j| \leq |z| + M \leq M(1 + |z|)$ car $M \geq 1$. Donc

$$\left| \frac{1}{g(z)} \right| \leq \prod_{j=1}^m M^{n_j} (1 + |z|)^{n_j} = M^N (1 + |z|)^N.$$

Comme $M_2 \leq M$ et $N \geq 1$, on a,
 pour $z \in D(0; R_1]$, $|\frac{1}{g(z)}| \leq M_2 \leq M^N (1+|z|)^N$.

On a montré que

$$\sup \frac{1}{|g|} \leq M^N (1+|z|)^N.$$

c). Comme $\frac{1}{g}$ est C_h^2 et on a b),
 $\frac{1}{g}$ est un polynôme de $d^0 \leq m$ par
 l'ex. 70. Il existe donc $d \in [0; m] \cap \mathbb{N}$
 et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ tq. $a_d \neq 0$ et
 $\forall z \in \mathbb{D}$, $\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^d a_k z^k$.

Supposons $d \geq 1$. Pour $w \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^d a_k w^{d-k} = a_d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k w^{d-k} \xrightarrow{w \rightarrow 0} a_d \neq 0.$$

Donc, par inv.,

$$\lim_{w \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^d a_k w^{d-k} \right)^{-1} = a_d^{-1}.$$

Il existe donc $\delta > 0$ tq.

$$|w| < \delta \Rightarrow \left| \left(\sum_{k=0}^d a_k w^{d-k} \right)^{-1} - a_d^{-1} \right| < \frac{|a_d|^{-1}}{2}.$$

Dne, pour $|w| < \delta$, on a

$$\left| \left(\sum_{k=0}^d a_k w^{d-k} \right)^{-1} \right| \leq \frac{|a_d|^{-1}}{2} + |a_d|^{-1} = \frac{3}{2} |a_d|^{-1}$$

Soit $z \in \mathbb{D} \setminus D(0; \frac{1}{\delta}]$. On a $|\frac{1}{z}| < \delta$ donc

$$\left| \left(\sum_{k=0}^d a_k z^{k-d} \right)^{-1} \right| \leq \frac{3}{2} |a_d|^{-1}$$

[6]

Soit

$$|z^d g(z)| \leq \frac{3}{2} |a_d|^{-1}$$

et

$$|g(z)| \leq \frac{3}{2} |a_d|^{-1} \delta^d.$$

Donc $\sup_{D(0; \frac{1}{\delta})} |g|.$

Comme g est C_h^1 , donc continue

$$\sup_{D(0; \frac{1}{\delta})} |g| < +\infty.$$

Donc g est bornée. Comme g est C_h^1 ,
 g est cte par le th. de Liouville.