

Ex. 78



5. a) Soit $\Delta: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ le prol. par conti. en 0 de $]0; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. Δ est continue.

Pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $x \geq 0$, on a

$$|\Delta(t) e^{-tx}| \leq \underbrace{|\Delta(t)|}_{\text{conti. donc int. sur } [0; \frac{\pi}{2}]}.$$

De plus, pour $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} = \frac{\sin(t)}{t}$.

D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Autre version: Soit $\Delta: [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ le prol. par conti. de $]0; \frac{\pi}{2}] \ni t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$. Δ est conti. donc int. aussi.

Pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &= \left| \int_0^{\pi/2} \Delta(t) (e^{-tx} - 1) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi/2} |\Delta(t)| (1 - e^{-tx}) dt \leq \int_0^{\pi/2} |\Delta(t)| t x dt \end{aligned}$$

Par, $0 \leq u \mapsto 1 - e^{-u} - u$ est négative.

Comme le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0 qd $x \rightarrow 0$, on a le résultat par le th. des gendarmes.

b) Soit $x \geq 0$. Soit $T > \frac{\pi}{2}$. On a, par IPP,

(2)

$$\int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = \int_{\pi/2}^T (-\cos(t))' \frac{e^{-tx}}{t} dt$$

$$\left| \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt \right| = \left[-\cos(t) \frac{e^{-tx}}{t} \right]_{\pi/2}^T + \int_{\pi/2}^T \cos(t) e^{-tx} \left(-\frac{1}{t^2} - \frac{x}{t} \right) dt$$

$$\left| \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt \right| = \frac{-\cos(T) e^{-Tx}}{T} + \int_{\pi/2}^T \cos(t) e^{-tx} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{x}{t} \right) dt,$$

$\downarrow T \rightarrow +\infty$
0

On peut passer la limite $T \rightarrow +\infty$. On obtient le résultat demandé.

c) soit $x \geq 0$ et $T > \frac{\pi}{2}$. On a, par b),

$$\int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = \underbrace{-\frac{\cos(T) e^{-Tx}}{T}}_{\downarrow T \rightarrow +\infty, 0} - \underbrace{\int_{\pi/2}^T \frac{\cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt}_{\downarrow T \rightarrow +\infty, 0} - x \int_{\pi/2}^T \cos(t) e^{-tx} \frac{1}{t} dt.$$

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt = g_1(x)$
fonct. conti. de x car $|\frac{\cos(t)}{t^2} e^{-tx}| \leq \frac{1}{t^2}$
intégr.

$$\int_{\pi/2}^T \cos(t) \frac{e^{-tx}}{t} dt = \int_{\pi/2}^T (\sin(t))' \frac{e^{-tx}}{t} dt$$

$$= \left[\frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \right]_{\pi/2}^T + \int_{\pi/2}^T \sin(t) e^{-tx} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{x}{t} \right) dt$$

$$= \underbrace{\frac{\sin(T) e^{-Tx}}{T}}_{\downarrow T \rightarrow +\infty, 0} - \frac{2e^{-2\pi/2}}{\pi} + \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t^2} e^{-tx} dt + x \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} e^{-tx} dt = g_2(x)$
fonct. conti. de x car $|\frac{\sin(t)}{t^2} e^{-tx}| \leq \frac{1}{t^2}$ intégr.

Donc, qd $T \rightarrow +\infty$,

$$\int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = o(1) + g_1(x) - x(o(1) - \frac{2e^{-2\pi/2}}{\pi} + g_2(x))$$

$$- x^2 \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

D'où, qd $T \rightarrow 0$

$$(1+x^2) \int_{\pi/2}^T \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt = \underbrace{g_1(x) - \frac{2e^{-x\pi/2}}{\pi} - xg_2(x)}_{g(x) \text{ conti.}} + o(1)$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$$

En passant à la limite $T \rightarrow +\infty$, on obtient la formule demandée -

d) On note $F_{\mathbb{R}^+}$ par $\tilde{F}$. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \\ &= o(1) + \frac{g(x)}{1+x^2} - \frac{g(0)}{1+0^2} \end{aligned}$$

qd $x \rightarrow 0$, par a) et b). Comme g est conti. en 0, on en déduit que

$$\lim_0 \tilde{F} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$