

Ex. 74: Réf. correctes: ex. 45 et 14.

1

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a; b])$.

On montre tout d'abord que $\gamma: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue. Comme $(z; e^{i\theta}, ie^{i\theta})$ est un repère orthornormée de $\mathbb{R}^2$, on a, pour $t \in [a; b]$,

$$\gamma(t) = \langle \gamma(t); e^{i\theta} \rangle e^{i\theta} + \langle \gamma(t); ie^{i\theta} \rangle ie^{i\theta}$$

$$\text{d'où } \gamma(t) = \langle \gamma(t); ie^{i\theta} \rangle ie^{i\theta}.$$

Comme $\langle \cdot; ie^{i\theta} \rangle$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, elle est anti. et, comme γ est anti, γ est anti. par composition.

1 - Par l'ex. 57,

$\text{Log}_0(\cdot - z)$ est une primitive de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D} \ni w \mapsto \frac{1}{w-z}$. (*)

Comme $\gamma^{-1}(\mathcal{D}) = \emptyset$, $\gamma([a; b]) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$ et,

Comme γ est fermé,

$$\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} = 0$$

par le cours. D'où $\text{Ind}(\gamma; z) = 0$.

2 - Soit $t_0 \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$.

a). Comme $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ est discret, t_0 est isolé dans $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$. Il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que

$$[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \cap \gamma^{-1}(\mathcal{D}) = \{t_0\}.$$

b). On considère le cas où $y(t_0 - \frac{\delta_0}{2}) < 0$.
 Si y prenait une valeur > 0 sur $]t_0 - \delta_0; t_0[$,
 y s'annulerait dans $]t_0 - \delta_0; t_0[$ par le th. des val.
 intermédiaires appl. à la fct. conti. y .
 Contr. puisque y ne s'annule pas sur $]t_0 - \delta_0; t_0[$
 d'après a). Dnc y est < 0 sur $]t_0 - \delta_0; t_0[$.

Dans le cas où $y(t_0 - \frac{\delta_0}{2}) > 0$, on montre de m.
 que y est > 0 sur $]t_0 - \delta_0; t_0[$.

De manière similaire, on montre que y est de
 signe strict constant sur $]t_0; t_0 + \delta[$.

On se trouve donc dans l'un des cas de l'énoncé.

c). Par l'ex. 57, on a, dans le cas C_1 , par
 conti. de γ et composition,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 + \delta) - z) = \theta$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 - \delta) - z) = \theta$$

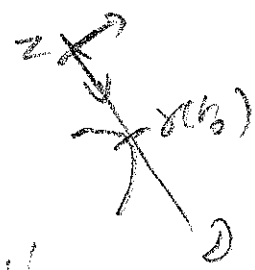
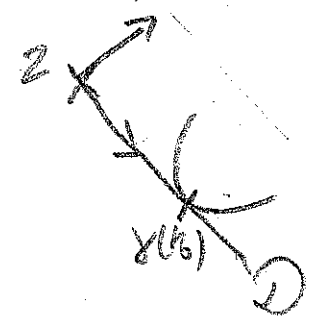
dnc on a le résultat cherché par différence.

Dans le cas C_2 , on a, par l'ex. 57 et composition,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 + \delta) - z) = \theta + 2\pi \text{ et}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 - \delta) - z) = \theta + 2\pi,$$

ce qui donne le résultat cherché, par différence.



d) Par l'ex. 57, on a, dans le cas C_3 , par
conti. de γ et composition,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 + \delta) - z) = \theta + 2\pi$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 - \delta) - z) = \theta.$$

e). Par l'ex. 57, on a, dans le cas C_4 , par conti.
de γ et composition,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 + \delta) - z) = \theta$$

et

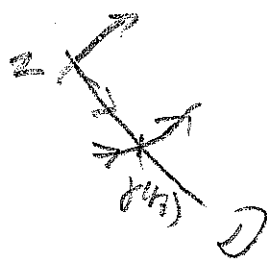
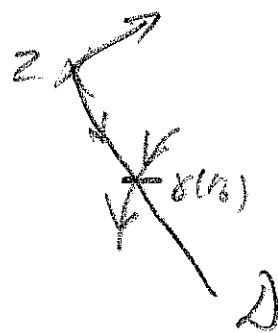
$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \text{Arg}_0(\gamma(t_0 - \delta) - z) = \theta + 2\pi.$$

3- Rectification de l'énoncé'. Pour $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$,
on note par $\delta(t)$ un $\delta_0 > 0$ validant 2.a)
pour t_0 remplacé par t . Dans la suite, on
considère des réels δ vérifiant

$$\delta \in]0; \min(\min\{\delta(t); t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})\}; |a - t_1|; |b - t_p|) [.$$

Pour un tel δ , $a \notin]t_1 - \delta; t_1 + \delta [$, $b \notin]t_p - \delta; t_p + \delta [$.
et, pour $k \in [2; p] \cap \mathbb{N}$, $\forall]t_k - \delta; t_k + \delta [$ rencontre $\mathcal{D}$
en t_k seulement et, pour $k \in [2; p] \cap \mathbb{N}$,
 $\forall]t_{k-1} + \delta; t_k - \delta [$ ne rencontre pas $\mathcal{D}$.

13



De plus, pour de tels δ , on a

4

$$\gamma = \gamma_{[a; t_1]} + \left[\sum_{k=2}^p \binom{p}{k} \left(\gamma_{[t_{k-1}+\delta; t_k+\delta]} + \gamma_{[t_{k-1}+\delta; t_k-\delta]} \right) \right. \\ \left. + \gamma_{[t_p-\delta; t_p+\delta]} + \gamma_{[t_p+\delta; b]} \right]$$

donc, par le cours,

$$\text{Litt Ind}(\gamma; z) = \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} dw$$

est donné par (21).

a). Comme $\gamma([a; t_1-\delta]) \cap \mathcal{D} = \emptyset$,
 $\gamma([a; t_1-\delta]) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$ et, par (*) et le cours,

$$\int_{\gamma([a; t_1-\delta])} \frac{dw}{w-z} = \left[\log_{\theta}(\cdot - z) \right]_{\gamma(a)}^{\gamma(t_1-\delta)}$$

De m., comme $\gamma([t_p+\delta; b]) \cap \mathcal{D} = \emptyset$,

$$\int_{\gamma([t_p+\delta; b])} \frac{dw}{w-z} = \left[\log_{\theta}(\cdot - z) \right]_{\gamma(t_p+\delta)}^{\gamma(b)}$$

Pour $k \in [2; p] \cap \mathbb{N}$, $\gamma([t_{k-1}+\delta; t_k-\delta]) \cap \mathcal{D} = \emptyset$ donc

$$\int_{\gamma([t_{k-1}+\delta; t_k-\delta])} \frac{dw}{w-z} = \left[\log_{\theta}(\cdot - z) \right]_{\gamma(t_{k-1}+\delta)}^{\gamma(t_k-\delta)}$$

b). Soit $k \in [1, P] \cap \mathbb{N}$. Comme γ est
continue, on a, pour $\delta > 0$ assez petit

[5]

$$\gamma([t_k - \delta, t_k + \delta]) \subset D(\gamma(t_k); \frac{|z - \gamma(t_k)|}{2})$$

dne

$$\gamma([t_k - \delta, t_k + \delta]) \cap (z + \mathbb{R}^+ e^{i(\theta + \pi)}) = \emptyset$$

dne, d'après l'ex. 57, par δ vérifiant les cond. préc.,

$$\int_{\gamma([t_k - \delta, t_k + \delta])} \frac{dw}{w - z} = \left[\text{Log}_{\theta + \pi}(\cdot - z) \right]_{\gamma(t_k - \delta)}^{\gamma(t_k + \delta)}$$

Par conti. de γ et conti. de $\text{Log}_{\theta + \pi}(\cdot - z)$,

$$\text{Log}_{\theta + \pi}(\gamma(t_k + \delta) - z) - \text{Log}_{\theta + \pi}(\gamma(t_k - \delta) - z)$$

$$\rightarrow \text{Log}_{\theta + \pi}(\gamma(t_k) - z) - \text{Log}_{\theta + \pi}(\gamma(t_k) - z) = 0,$$

c). Quand $\delta \rightarrow 0^+$, on a, d'après (21) et b),

$$\begin{aligned} 2i\pi \text{Ind}(\gamma; z) &= o(1) + \int_{\gamma[a; t_1 - \delta]} \frac{dw}{w - z} + \int_{\gamma[t_1 + \delta; b]} \frac{dw}{w - z} \\ &+ \sum_{k=2}^P \int_{\gamma[t_{k-1} + \delta; t_k - \delta]} \frac{dw}{w - z} \end{aligned}$$

Comme γ est fermé, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Dne, d'après a), on a, qd. $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned}
2i\pi \text{Ind}(f; z) &= \text{Log}_0(\gamma(t_1 - \delta) - z) - \text{Log}_0(\gamma(t_1) - z) + \text{Log}_0(\gamma(t_1) - z) - \text{Log}_0(\gamma(t_{p+1} - \delta) - z) \quad (6) \\
&\quad + \sum_{k=2}^p (\text{Log}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Log}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)) + o(1) \\
&= o(1) + \sum_{k=1}^p \text{Log}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \underbrace{\sum_{k=2}^{p+1} \text{Log}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)}_{\text{changement d'indice}} \\
&= o(1) + \sum_{k=1}^p (\text{Log}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Log}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)).
\end{aligned}$$

Par def. de Log_0 , on a, qd. $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned}
2i\pi \text{Ind}(f; z) &= o(1) + \sum_{k=1}^p (\ln|\gamma(t_k - \delta) - z| - \ln|\gamma(t_{k+1} - \delta) - z|) \\
&\quad + i \sum_{k=1}^p (\text{Arg}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Arg}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)).
\end{aligned}$$

Comme γ est conti., $\gamma(t_k - \delta) - z \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \gamma(t_k) - z \neq 0$

Comme $|\cdot|$ est conti. sur $\mathbb{C}^*$ à val. dans $\mathbb{R}^+$, on

$\ln$ est conti., on a $\ln|\gamma(t_k - \delta) - z| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} \ln|\gamma(t_k) - z|$

et, de m., $\ln|\gamma(t_{k+1} - \delta) - z| \rightarrow \ln|\gamma(t_{k+1}) - z|$. Dnc,

qd. $\delta \rightarrow 0^+$,

$$2i\pi \text{Ind}(f; z) = o(1) + i \sum_{k=1}^p (\text{Arg}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Arg}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)).$$

On utilise maintenant c), d) et e). On a dnc,

qd. $\delta \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned}
2i\pi \text{Ind}(f; z) &= o(1) + i \sum_{t \in \gamma^{-1}(z)} (\text{Arg}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Arg}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z)) \\
&= o(1) + i \sum_{t \in \mathbb{E}_+ \cup \mathbb{E}_-} (\text{Arg}_0(\gamma(t_k - \delta) - z) - \text{Arg}_0(\gamma(t_{k+1} - \delta) - z))
\end{aligned}$$

not

$$2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma; z) = o(1) + i \sum_{t \in E_+} (0 + 2\pi - 0 + o(1)) + i \sum_{t \in E_-} (0 - (0 + 2\pi) + o(1))$$

$$= o(1) + i \sum_{t \in E_+} 2\pi + \sum_{t \in E_-} (-2\pi)$$

$$= o(1) + 2i\pi \left(\sum_{t \in E_+} 1 - \sum_{t \in E_-} 1 \right)$$

$$= o(1) + \underbrace{2i\pi (\operatorname{card}(E_+) - \operatorname{card}(E_-))}_{\text{indép. de } \delta}.$$

d). Comme le m.b. de gauche des égalités précédentes ne dépend pas de δ , on a, en passant à la limite $\delta \rightarrow 0^+$,

$$2i\pi \operatorname{Ind}(\gamma; z) = 2i\pi (\operatorname{card}(E_+) - \operatorname{card}(E_-))$$

d'après

$$\operatorname{Ind}(\gamma; z) = \operatorname{card}(E_+) - \operatorname{card}(E_-).$$