Ex. 2 (feuille supp.) DM 1/1

1 - Comme exp est dérivable de dérivée elle-même, qui est une funct. strictement positive (cf. les rappels), exp est strictement ↑. Comme exp est cont., elle est bij. de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Soit $y>0$.
Comme $\lim_{+\infty} \exp = +\infty$, il existe $A>0$ t.q.
$x>A \Rightarrow \exp(x)>y$.
Comme $\lim_{-\infty} \exp = 0$, il existe $B>0$ t.q.
$x<-B \Rightarrow 0<\exp(x)<y$.
Donc $\exp(A+1) > y > \exp(-B-1)$. Comme exp est cont., on a, par le Th. des val. intermédiaires (cf. L1S1), l'existence d'un $x \in]-B-1; A+1[$ t.q. $\exp(x)=y$. Donc $\mathbb{R}^{+*} \subset \exp(\mathbb{R})$.
Bilan $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$ et exp est bij. de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2 - Par 1, $\ln : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$. Comme exp est dérivable et que sa dérivée ne s'annule pas, ln est dérivable (cf. L1S1) et

$$\forall y>0,\quad \ln'(y) = (\exp^{<-1>})'(y) = \frac{1}{\exp(\exp^{<-1>}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y}.$$

3 - Sur $\mathbb{R}^{+*}$ $x \mapsto |x|$ est la funct. $x \mapsto x$. Elle y est donc dérivable, sur $\mathbb{R}^{-*}$, $x \mapsto |x|$ est la funct. $x \mapsto -x$. Elle y est donc aussi dérivable.
Donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*}$ et

$$\forall x>0,\quad f'(x) = \frac{1}{|x|} \times 1 = \frac{1}{x}.$$

Par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ et

$$\forall x<0,\quad f'(x) = \frac{1}{|x|} \times (-1) = \frac{1}{-x} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

4 - P_α est dérivable par composition et

$$\forall x>0,\quad P_\alpha'(x) = e^{\alpha \ln x} \times \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{e^{\alpha \ln x}}{e^{\ln x}} = \alpha e^{\alpha \ln x - \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha P_{\alpha-1}(x).$$

5- On sait que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et cos' = -sin. Sur $]0;\pi[$, sin est str. positive donc cos est str. ↓ sur $[0;\pi]$ (cf. L151). Comme cos est cont. sur $[0;\pi]$, elle est bij. de $[0;\pi]$ sur $\cos([0;\pi])$ (cf. L151). Par un résultat du L151, (comme cos ↓), on a

$$\cos([0;\pi]) = \left[\min_{x\in[0;\pi]} \cos(x) ; \max_{x\in[0;\pi]} \cos(x)\right]$$
$$= [\cos(\pi) ; \cos(0)]$$
$$= [-1;1].$$

6- Sur $]0;\pi[$, la dérivée de cos est str. négative donc, par le L151, Arccos est dérivable sur $[-1;1]\setminus\{\cos(0);\cos(\pi)\} =]-1;1[$ et, pour $y\in]-1;1[$,

$$\text{Arccos}'(y) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(y))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(y))}.$$

Or $\sin^2(\text{Arccos}(y)) = 1 - \cos^2(\text{Arccos}(y))$ et, comme $y\in]-1;1[$, $\cos(\text{Arccos}(y)) = y$, donc $\sin^2(\text{Arccos}(y)) = 1-y^2$. (comme $\text{Arccos}(y)\in]0;\pi[$, $\sin(\text{Arccos}(y)) > 0$ donc $\sin(\text{Arccos}(y)) = +\sqrt{1-y^2}$. On a donc

$$\forall y\in]-1;1[,\ \text{Arccos}'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

7- Sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée sinus, sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, cos est str. positive donc sin est str. sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ (cf. L151). (comme sinus est cont. sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ elle est bij. de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ sur $\sin([-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}])$.

Par un résultat du LAS1, comme sin est $\mathcal{C}^1$,

$\sin([-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]) = [\min_{x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} \sin(x), \max_{x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} \sin(x)]$

$= [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})] = [-1;1]$.

8- Sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, la dérivée de sin ne s'annule pas donc, Arcsin est dérivable sur $[-1;1]\setminus\{\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(\frac{\pi}{2})\}$

$=]-1;1[$ et, pour $y\in]-1;1[$,

$$\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(y))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(y))}.$$

Or $\cos^2(\text{Arcsin}(y)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(y))$ et $\sin(\text{Arcsin}(y)) = y$ car $y\in]-1;1[$, donc $\cos^2(\text{Arcsin}(y)) = 1-y^2$. De plus, comme $\text{Arcsin}(y)\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\cos(\text{Arcsin}(y))>0$ donc $\cos(\text{Arcsin}(y)) = +\sqrt{1-y^2}$. Ainsi

$\forall y\in]-1;1[$, $\text{Arcsin}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

9- tangente est dérivable par quotient et, pour $x\in]-\pi/2;\pi/2[$,

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$= 1 + \tan^2(x) \geq 1$.

De plus, pour $x\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$,

donc tangente est impaire.

Par ailleurs, d'après les limites de sinus et cosinus, on a $\lim_{x\to\pi/2} \sin(x) = 1$ et $\lim_{x\to\pi/2} \cos(x) = 0$ et $\tan\geq 0$ sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ donc

par quotient $\lim_{x \to \pi/2} \tan$ existe et vaut $+\infty$.

1°- Comme tan est conti. et str. ↗ sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, elle est bij. de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\tan(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[) \subset \mathbb{R}$.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = -\tan(-x)$

donc par composition, sachant que $\lim_{+\pi/2} \tan = +\infty$,

$\lim_{-\frac{\pi}{2}} \tan$ existe et vaut $-\infty$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{+\pi/2} \tan = +\infty$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

$\frac{\pi}{2} - \varepsilon < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(x) > y$.

Comme $\lim_{-\pi/2} \tan = -\infty$, il existe $\delta > 0$ t.q.

$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} + \delta \Rightarrow \tan(x) < y$.

Donc $\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}) > y > \tan(-\frac{\pi}{2} + \frac{\delta}{2})$.

Comme tan est conti., il existe, par le Th. des val. intermédiaires, $x \in]-\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2}; \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}[$ t.q. $\tan(x) = y$. Donc $\mathbb{R} \subset \tan(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$

et $\mathbb{R} = \tan(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[)$.

11- Comme la dérivée de tan est str. positive (elle est ≥ 1), elle ne s'annule pas donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(y))} = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(y))}$$

Or $\tan(\text{Arctan}(y)) = y$ donc

$\forall y \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

12- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \text{ch}(x) \text{ et } \text{sh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\text{sh}(x).$$

Donc ch est paire et sh impaire. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$ch^2(x) - sh^2(x) = \frac{(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2) - (e^{2x}+e^{-2x}-2)}{4}$$

$$= \frac{2e^{-x} \times 2e^{x}}{4} = 1.$$

13- Comme exp est dérivable, ch et sh sont dérivables par composition et somme. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x) \text{ et } sh'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = ch(x).$$

14- Pour $x \geq 0$,

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{-x}}{2}\left(e^{2x} - 1\right) > 0$$

(car $2x \geq 0$ et $e^{2x} \geq e^0 = 1$ (exp. est str. ↑)).

Donc sh est str. ↑ sur $[0; +\infty[$

Pour $x \geq 0$,

$$ch(x) = \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}\underbrace{\left(1 - e^{-2x}\right)}_{\downarrow x \to +\infty \; 0} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \text{ par produit.}$$

15- (comme ch est cont.,

bij. de $[0; +\infty[$ sur $ch([0; +\infty[)$.

Pr, $x \in [0; +\infty[$, $ch(x) \geq ch(0) = 1$ donc $ch([0; +\infty[) \subset [1; +\infty[$.

Soit $y \in [1; +\infty[$. Si $y = 1$, $y = ch(0)$. Supp. $y > 1$.

(cf. $\lim_{+\infty} ch = +\infty$, il existe $A > 0$ t.q.

$x \geq A \Rightarrow ch(x) > y$.

$ch(0) = 1 < y < ch(A+1)$. (comme ch est cont.,

il existe $x \in [0; A+1]$ t.q. $y = ch(x)$ par le Th. des val. intermédiaires. Donc $[1; +\infty[\subset ch([0; +\infty[)$

et $[1; +\infty[= ch([0; +\infty[)$.

16 - Sur $]0;+\infty[$, $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ est str. positive donc ne s'annule pas, Argch est donc dérivable

Sur $[1;+\infty[\setminus \{\mathrm{ch}(0)\} =]1;+\infty[$ et, pour $y \in]1;+\infty[$,

$$\mathrm{Argch}'(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{Argch}(y))} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(y))}.$$

Or $\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argch}(y)) = \mathrm{ch}^2(\mathrm{Argch}(y)) - 1$ et comme $y \in]1;+\infty[$, $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(y)) = y$ donc

$\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argch}(y)) = y^2 - 1$; comme $\mathrm{Argch}(y) > 0$

$\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(y)) > 0$ d'où $\mathrm{sh}(\mathrm{Argch}(y)) = +\sqrt{y^2-1}$ et

$\forall y \in]1;+\infty[$, $\mathrm{Argch}'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$.

17 - Pour $y = 1$, $x = 0$ est sol. de $\mathrm{ch}\,x = 1$ et comme ch est inj. c'est la seule sol.

On suppose $y > 1$. On cherche les sol. $x \geq 0$ de $\mathrm{ch}(x) = y$. On a

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff e^x + e^{-x} = 2y \overset{e^x \neq 0}{\iff} e^{2x} + 1 = 2ye^x \iff \begin{cases} X^2 - 2yX + 1 = 0 \\ X = e^x, \end{cases}$$

$\Delta = 4y^2 - 4 > 0$ car $y > 1$.

$$\iff \begin{cases} X = \dfrac{2y + \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y + \sqrt{y^2-1} \text{ ou } X = \dfrac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \\ X = e^x. \end{cases}$$

$y - 1 \geq 0$!

Or on a

$$y - \sqrt{y^2-1} < 1 \iff y - 1 < \sqrt{y^2-1} \iff (y-1)^2 < y^2 - 1$$

$$\iff y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1 \iff 2 < 2y \iff 1 < y.$$

Comme $y > 1$, $y - \sqrt{y^2-1} < 1 \leq e^x$ car $x \geq 0$. D'où

$$\mathrm{ch}(x) = y \iff e^x = \underbrace{y + \sqrt{y^2-1}}_{>0} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

Par déf. de Argch, $\mathrm{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$.

On remarque que cette formule est encore valable pour $\boxed{7}$
$x=1$.

18- Comme l'exp. est str. positive, ch aussi (en fait on a montré plus haut que $ch \geq 1$).
Donc la dérivée de sh est str. positive et sh est str. C. De plus, comme $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$
on a par somme $\lim_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$.

19- Comme sh est impaire, $sh(x) = -sh(-x) \xrightarrow{x\to-\infty} -\infty$.
$\downarrow x\to-\infty$, $+\infty$ (composition)

Comme sh est cont. et str. $\nearrow$, elle est bij. de $\mathbb{R}$ sur $sh(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{+\infty} sh = +\infty$, il existe $A > 0$ t.q.
$x > A \Rightarrow sh(x) > y$.
Comme $\lim_{-\infty} sh = -\infty$, il existe $B > 0$ t.q.
$x < -B \Rightarrow sh(x) < y$.
Donc $y \in [sh(-B-1); sh(A+1)]$. Comme sh est cont., il existe $x \in [sh(-B-1); sh(A+1)]$ t.q. $y = sh x$ par le Th. des val. intermédiaires. D'où $\mathbb{R} \subset sh(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R} = sh(\mathbb{R})$.

20- Comme $sh' = ch$ ne s'annule pas, Argsh est dérivable et pour $y \in \mathbb{R}$,
$Argsh'(y) = \frac{1}{sh'(Argsh(y))} = \frac{1}{ch(Argsh(y))}$.
or $ch^2(Argsh(y)) = 1 + sh^2(Argsh(y))$, $sh(Argsh(y)) = y$ et $ch(Argsh(y)) > 0$,
$ch(Argsh(y)) = +\sqrt{y^2+1}$. D'où
$\forall y \in \mathbb{R}$, $Argsh'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$.

21. On a

$$\sh(x) = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff e^{2x} - 1 = 2ye^x \quad (e^x \neq 0)$$

$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ X^2 - 2yX - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = 4y^2 + 4 > 0$$

$$\iff \begin{cases} X = e^x \\ \text{et} \\ X = \dfrac{2y + \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y + \sqrt{y^2+1} \quad \text{ou} \quad X = \dfrac{2y - \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}. \end{cases}$$

Or $y^2 + 1 > y^2 = |y|^2$ donc $\sqrt{y^2+1} > |y| \geqslant y$ et $\geqslant -y$ et $e^x > 0$ donc

$$\sh(x) = y \iff e^x = \underbrace{y + \sqrt{y^2+1}}_{>0} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}).$$