

Cours distant.

1

Déf.: Un réel x_0 est adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si, pour tout $r > 0$, $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$.

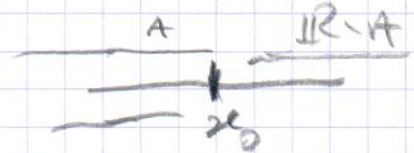
Prop. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.

1. Si $x_0 \in A$ alors x_0 est adh. à A .

2. Si $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$(x_0 \text{ adh. à } A) \Leftrightarrow (\mathbb{R} \setminus A) \neq \bigcup_{x_0} \text{ (voisinages de } x_0 \text{)}$$

Preuve:



1. Soit $x_0 \in A$. Soit $r > 0$. Comme

$x_0 \in I(x_0; r[$ et $x_0 \in A$, $x_0 \in I(x_0; r[\cap A$
d'où $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$.

2. admise.

Voisinages de $+\infty$ et $-\infty$ dans $\mathbb{R}$.

Déf.: Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

A est un vois. de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tq.

$$]a; +\infty[\subset A$$

A



$$]-\infty; a[\subset A$$

$N_{+\infty}$ (resp. $N_{-\infty}$) l'ens. des vois. de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Prop: Soit $X =]-\infty; +\infty[$.

12

1- $\forall (A, B) \in \mathcal{V}_X^2, A \cap B \in \mathcal{V}_X$.

2- $\forall C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (\exists B \in \mathcal{V}_X; B \subset C) \Rightarrow C \in \mathcal{V}_X$.

3- Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe $A \in \mathcal{V}_{-\infty}, B \in \mathcal{V}_a$
et $C \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tq. $A \cap B = \emptyset, A \cap C \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$.

Preuve: 1 et 2 $\rightarrow$ lire le texte du cours.

3- Soit $\delta > 0$ et $A =]-\infty; a - \delta[, B =]a; \delta[$
et $C =]a + \delta; +\infty[$. On a $A \in \mathcal{V}_{-\infty}, C \in \mathcal{V}_{+\infty}$
et $B \in \mathcal{V}_a$. On voit $A \cap B = \emptyset, A \cap C \neq \emptyset$ et $B \cap C \neq \emptyset$.

Différence avec les vois. d'un pt.: $+\infty$ n'appartient
pas à ses voisinages, car $+\infty \notin \mathbb{R}$.

Rq: $\{0\} \cup [1; +\infty[\in \mathcal{V}_{+\infty}$

Car il contient $]1; +\infty[$.

* on peut vérifier que $\mathcal{N}$ n'est pas un
vois. de $+\infty$.

Déf.: Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$+\infty$ est adh. à A si $\forall B \in \mathcal{V}_{+\infty}, A \cap B \neq \emptyset$.

$-\infty$ ————— $\mathcal{V}_{-\infty}$, —————

$+\infty$ est adh. à $\mathcal{N}$.

Suites réelles et complexes.

13

Def. et examp.

$$\mathbb{K} := \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Def. : Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une appl. $u : D \rightarrow \mathbb{K}$ où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Par une telle suite, on note $u(n)$ par $u_n \in \mathbb{K}$.

$$\mathbb{K}^D = \{ \text{suite de } D \text{ dans } \mathbb{K} \}.$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle de suites réelles

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, complexes.

Exemples :

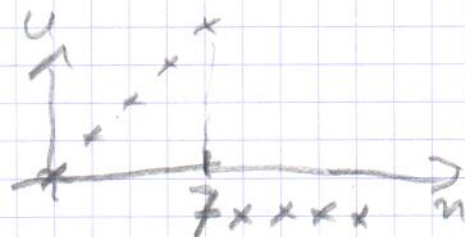
$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto \frac{1}{n} \quad n \mapsto \frac{1}{n+1}$$

$$w : \mathbb{I}3; +\infty\mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto \frac{1}{n}, \quad w = u|_{\mathbb{I}3; +\infty\mathbb{I}}$$

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n$.

$$y : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \leq 7 \\ -1 & \text{si } n > 7 \end{cases}$$



On voit que y est constante à partir
du rang 8.

4

Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$\frac{7n+5}{n(n-3)}$$

a un sens exactement pour $n \in \overbrace{\mathbb{N} \setminus \{0, 3\}}^D$.

On peut déf. $u : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto \frac{7n+5}{n(n-3)}$$

Soit $D' = \llbracket 4; +\infty \rrbracket$ et $v : D' \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto \frac{7n+5}{n(n-3)}$$

On a $v = u|_{D'}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule $\frac{1}{\sin(n\pi/4)}$

a du sens ssi $n \notin 4\mathbb{N}$. Pour $D = \mathbb{N} \setminus 4\mathbb{N}$

$u : D \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto \frac{1}{\sin(n\pi/4)}$$

Suites complexes; $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$n \mapsto i^n$$

$v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$n \mapsto \exp(in\pi/6).$$

Suites récurrentes :

Suites récu. associée à une funct.

Soit $f: D \rightarrow K$ où $D \in K$.

Partant de $u_0 \in D$, on déf. $u_1 = f(u_0)$

puis $u_2 = f(u_1)$ puis $u_3 = f(u_2)$ etc...

Définissons-nous ainsi une suite à valeurs dans K ?

1^{er} Pb. : il peut arriver que $u_3 \notin D$,
on ne peut pas calculer u_4 .

On va le régler en imposant : $f(D) \subset D$.

2^e Pb. : on doit déf. une infinité de termes,
régler par le Th de récu..

Prop. : Soit $f: D \rightarrow K$ avec $D \in \mathcal{P}(K)$
et $f(D) \subset D$. Pour $d \in D$, il existe
une unique suite $u: \mathbb{N} \rightarrow D$ vérifiant $u_0 = d$ et
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ (rel. de récu.)

Preuve : admise -

Déf. : cette suite u est la suite récu.
atto. à f de 1^{er} terme d .

Soit $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$
 $x \mapsto ax+b$

16

avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$,

On a bien $f(\mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$.

Def. : la suite récu. u associée à f de premier terme $d \in \mathbb{K}$ est appelée suite arithmético-géométrique de premier terme d .

Si $b=0$, u est la suite géom. et raison a de 1^{er} terme d .

Si $a=1$, u est ——— arithmétique de raison b et de 1^{er} terme d .

Sommes et séries :

Soit $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$.

on veut sommer les termes de u :

$$S_0 = u_0, \quad S_1 = u_0 + u_1, \quad S_2 = u_0 + u_1 + u_2$$

etc.

Prop. : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [n_0; +\infty[$

et $u: D \rightarrow \mathbb{K}$, il existe une unique suite $S: D \rightarrow \mathbb{K}$ tq. $S_{n_0} = u_{n_0}$ et

$$\forall n \in D, \quad S_{n+1} = S_n + u_{n+1}.$$

Preuve : admise.

17

Déf. : Dans le cadre de la prop. précé.
on note

$$A_n =: \sum_{k=n_0}^n u_k =: \sum_{k \in [n_0, n]} u_k =: \sum_{n_0 \leq k \leq n} u_k.$$

Convention : Si $n < n_0$, $\sum_{k=n_0}^n u_k = 0$,

A est la série ass. à u ou de terme général u .

Prop. : Dans le cadre de la prop. précé. :

$$0 \leq q \leq n, \quad \sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{k=n_0}^q u_k + \sum_{k=q+1}^n u_k$$

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{l=n_0+m}^{n+m} u_{l-m}$$

$$\sum_{k=n_0}^n u_k = \sum_{l=n_0-m}^{n-m} u_{l+m}$$

$$\sum_{k=n_0}^n \lambda u_k = \lambda \sum_{k=n_0}^n u_k.$$

$$\sum_{k=n_0}^n (u_k + v_k) = \left(\sum_{k=n_0}^n u_k \right) + \left(\sum_{k=n_0}^n v_k \right).$$

$$\left| \sum_{k=n_0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^n |u_k|.$$

Si u est constante égale à c , $\sum_{k=n_0}^n u_k = c \times (n - n_0 + 1)$.

Preuve : admise -

Prop. : Soit $d \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ la suite arith.-gém. associée à (a, b) de 1^{er} terme d .

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = d \times a^n + b \sum_{k=0}^{n-1} a^k,$$

$$\text{Si } b=0, \quad u_n = d \times a^n$$

$$\text{Si } a=1, \quad u_n = d + nb$$

$$\text{Si } a \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1}.$$

Preuve : td.

Produits, puissances et factorielles.

Prop. : Soit $u: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$.

Il existe une unique suite $\pi: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\pi_0 = u_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \pi_{n+1} = \pi_n \times u_{n+1}.$$

Preuve : admise -

Def : Dans le cadre de la prop. précédente. 19

$$\pi_n =: \prod_{k=n_0}^n u_k =: \prod_{k \in [n_0; n]} u_k =: \prod_{n_0 \leq k \leq n} u_k.$$

$$\text{Si } n < n_0, \quad \prod_{k=n_0}^n u_k = 1 \quad (\text{convention})$$

Si u est constante égale à a

$$\pi = (a^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Convention $a^0 = 1$.

$$\text{Si } u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n$$

$$\text{on note } \pi_n = \prod_{k=1}^n k =: n!$$

Convention : $0! = 1$.

Prop. des suites

Prop. génér.

Def : $u: D \rightarrow \mathbb{K}, v: D \rightarrow \mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}.$

$$w: D \rightarrow \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n + v_n$$

est la somme $u+v$
de u et v .

$$\lambda u: D \rightarrow \mathbb{K} \\ n \mapsto \lambda u_n$$

produit de u par λ .

u est dite cte égale à $c \in \mathbb{K}$

Si $\forall n \in \mathbb{D}, u_n = c$.

Sont $N \in \mathbb{N}$, on dit u est cte égale à c à partir du rang N Si

$\forall n \in \mathbb{D} \cap [\mathbb{N}; +\infty[, u_n = c$.

On dit que u est stationnaire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{K}$ t.q. u est cte égale à c à partir de N .

Ex: $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \frac{1}{n}$

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{D}}^{\text{cst.}}$$

$$2u = \left(\frac{2}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$v: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad w: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto \ln(n) \quad \quad n \mapsto \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Pour } n > 0, \quad v_n + w_n = \ln(n) + \ln\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln(n) - \ln(n) = 0,$$

$v + w = 0$ suite nulle sur $\mathbb{N}^*$.

Prop.: $\mathbb{K}^{\mathbb{D}}$ muni des lois précédentes est un $\mathbb{K}$ -esp. vect. (de dim. infinie).

Preuve: admise.

Def. : $u : D \rightarrow \mathbb{K}$, $v : D \rightarrow \mathbb{K}$. $\underline{M}$

$u.v : D \rightarrow \mathbb{K}$ produit u par v .

$n \mapsto U_n \times V_n$.

$|u| : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ module (resp val. abs.)

$n \mapsto |U_n|$.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\text{Re } u : D \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto \text{Re } U_n$

$\text{Im } u : D \rightarrow \mathbb{R}$

$n \mapsto \text{Im } U_n$.

Rq. : si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u : D \rightarrow \mathbb{K}$

alors $\lambda u = u.v$

on

$v : D \rightarrow \mathbb{K}$

$n \mapsto \lambda$.