Lire

Avertissement.

Le cours qui suit est une introduction élémentaire à la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, considérée comme un cours de mathématiques de niveau L1. Il présente une formulation mathématiquement rigoureuse des notions de limite et de continuité. Cette formulation est basée sur le calcul propositionnel, qui est considéré comme un prérequis à la lecture de ce cours. La construction de $\mathbb{R}$, avec les propriétés qui la caractérisent, est également un prérequis admis. Le cours utilise la notion de voisinage, préparant ainsi l'étude de la topologie des espaces normés (et éventuellement la topologie générale), qui sera faite dans les niveaux supérieurs.

À la différence de nombreux livres sur le sujet, ce cours s'efforce de démontrer en détails tous ses résultats, l'objectif étant de donner au lecteur un accès très précis aux arguments des preuves, au prix certes d'une certaine lourdeur dans la rédaction. L'auteur considère que l'effort fait dans ce cours pour décortiquer l'argumentation des résultats est nécessaire à une compréhension durable et profonde du sujet et à une utilisation fructueuse des résultats et des idées de ce cours dans les cours des niveaux supérieurs. Au lieu de laisser cette tâche au lecteur, il s'en est chargé.

Le présent cours sert de base à un cours réellement donné en amphi au niveau L1 en 2022-2023. Ne serait-ce que pour des questions de temps, l'ensemble du présent texte ne sera pas couvert lors des séances en salle. Par ailleurs, on peut légitimement considérer certains résultats du cours comme secondaires. L'auteur a cependant estimé utile de fournir un assez grand nombre de "compléments" à un cours "minimal" sur le sujet pour les raisons suivantes :
- Certains compléments ne sont jamais traités en détails pour des questions de temps mais sont quand même importants. C'est le cas d'une construction de l'exponentielle complexe, par exemple, et de ses conséquences sur l'exponentielle réelle et les logarithmes.
- La partie 8 fournit une contruction et une étude de plusieurs fonctions "usuelles". On peut considérer certaines de ces fonctions comme superflues. L'auteur a jugé utile de les inclure comme illustration de l'application de résultats de la partie 7.
- Certains résultats basiques (sur l'ensemble $\mathbb{N}$ notamment) sont souvent considérés comme admis (ou pire, comme "évidents"). Même si l'on ne prouve pas de tels résultats dans un cours en amphi, l'auteur a estimé utile, pour le lecteur soucieux de bien les comprendre, d'en fournir une preuve (cf. paragraphes 3.2.2 et 9.1, par exemple).
- Outre le fait de donner une introduction rigoureuse à la topologie normée de $\mathbb{R}$, l'objectif de ce texte est aussi de préparer et sensibiliser le lecteur à des notions, idées, méthodes, etc... qui sont employées dans des cours de mathématiques de niveaux supérieurs. Par exemple, la construction de l'exponentielle complexe met en avant le fait que cette application est un morphisme de groupe, sans le dire (cf. paragraphes 8.1 et 9.4). Par exemple, la notion de suite de Cauchy, qui est essentielle dans l'étude des séries, normalement traitée en L2, est introduite au paragraphe 3.8 et exploitée pour définir l'exponentielle complexe (cf. paragraphes 8.1 et 9.4).
- Enfin, l'auteur espère que ce texte s'avère utile aux étudiants préparant le CAPES ou l'Agrégation de mathématiques en leur fournissant une présentation rigoureuse de notions topologiques simples (ou simplifiées) dont ils ont vu ensuite des généralisations.

La matière de ce cours est indispensable à la poursuite d'études en mathématiques en L2, L3 et M1. Les étudiants souhaitant suivre ce parcours ont intérêt à bien comprendre ce cours et, si possible, à profiter des compléments qu'il contient. Les étudiants attirés par les sciences expérimentales pourraient considérer que les notions difficiles de mathématiques de ce cours ne sont pas vitales pour eux. Certes, c'est peut-être vrai mais, en les négligeant, ils renoncent à un entraînement de qualité de gymnastique intellectuelle, de rigueur scientifique et d'appréhension de la complexité, entraînement qui ne peut être que bénéfique à tout scientifique.

Comme les mathématiques sont une espèce de jeu de construction, on ne peut pas se permettre de négliger les bases si l'on veut monter dans les étages. C'est pourquoi l'oubli de connaissances accumulées dans les cours de mathématiques précédant celui-ci ne peut être que nuisible à la compréhension de ce cours. Plus

précisément, on aura surtout besoin des prérequis suivants :
- Calcul ensembliste;
- Calcul propositionnel;
- Propriétés des ensembles de nombres et des opérations sur les nombres, notamment sur les nombres réels et sur les nombres complexes;
- Notion d'espace vectoriel.

Venons-en à l'organisation du cours. De manière quasi systématique, les notions et les résultats de ce cours sont placés dans des environnements textuels spéciaux, écrits en italique, portant en gras les noms de "Définition, Proposition, Corollaire, Théorème" tandis que les preuves (ou démonstrations) sont encadrées par le mot en gras "Preuve" et par le symbole $\square$. Le reste est du commentaire dont la fonction est d'essayer d'expliquer intuitivement les notions et les résultats. Dans chaque partie, on numérote chaque définition, proposition, lemme, théorème, corollaire, remarque, selon son ordre d'apparition dans ladite partie. Une table des matières est disponible à la fin du texte.

Le chapitre 1 est dévolu à la presentation de propriétés de base (pour la plupart déjà vues dans des cours antérieurs) qui seront utiles pour la suite du cours. Le chapitre 2 présente la notion de voisinage qui sera au coeur de la définition des limites de suites et de fonctions. Le chapitre 3 traite de l'étude des suites réelles et complexes et de la notion de limite pour ces objets. Il contient aussi d'utiles résultats sur les sommes et les produits finis qui sont souvent considérés comme connus mais rarement justifiés. Le chapitre 4 est dévolu aux notions de limite et de continuité pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Dans le chapitre 5, on donne des propriétés sur les fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle. Le chapitre 6 traite de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Dans le chapitre 7 on traite des bijections continues et on étudie leur bijection réciproque. Le chapitre 8 présente les fonctions usuelles et leurs propriétés. Il contient aussi des constructions de fonctions "plates", qui peuvent sembler exotique à première vue mais sont indispensables à la théorie des distributions (une importante théorie en analyse). Enfin, le chapitre 9 regroupe de nombreux résultats utiles pour les chapitres précédents. Certains sont des résultats basiques directement utilisés dans des preuves des chapitres précédents, d'autres sont des résultats proches des thèmes abordés dans les autres chapitres. En particulier, on y traite de la notion de contruction par récurrence d'une suite et d'une construction rigoureuse de la fonction exponentielle complexe.

Terminons par des conseils aux étudiants de L1 suivant ce cours. Rappelons tout d'abord que l'examen vise à mesurer la compréhension et la maîtrise du cours par des étudiants. Cette mesure se fait en évaluant la résolution d'exercices. Les exercices des examen et des TDs sont constitués de questions ou d'injonctions auxquelles on doit répondre par une démonstration. Il est donc indispensable d'apprendre à faire des démonstrations et, pour ce faire, **rien ne remplace l'expérience personnelle !** Il faut donc apprendre a résoudre **tout seul** des questions d'exercice. Cela se passe toujours comme cela : on analyse le résultat à démontrer et on comprend pourquoi il est vrai (tout ceci est au brouillon), puis on élabore une preuve (éventuellement au brouillon puis au propre). Le plus souvent, le cours s'avère indispensable dans la démarche précédente, pour la phase de recherche comme pour celle de rédaction de la démonstration. Pour bien utiliser cette boîte à outils qu'est le cours, il faut connaître les outils et avoir compris à quoi ils servent. C'est ce qu'on fait pour comprendre le cours. Les exercices basiques des TDs servent justement à tester si l'on a bien compris tel ou tel outil. Ils sont résolus en appliquant directement un outil vu dans le cours. Enfin le cours fournit aussi des exemples de démonstration. Il est utile de les analyser en détail (en commençant par les plus courtes). Cela peut s'avérer être un travail de fourmi mais cela "paye". Les exercices des TDs constituent un entraînement permanent à l'examen. Les étudiants ont donc intérêt à faire le plus possible de résolutions de question par eux-mêmes, puisqu'ils seront seuls à l'examen devant la même situation.

LIre

1 Préliminaires et notations.

Lire

Dans cette partie, on rappelle des notions et résultats basiques plus ou moins connus. On introduit aussi des notations. En particulier, on utilise les notations "$a := b$" ou "$b =: a$" pour dire que a est défini par b. Au niveau du calcul logique, on utilise les signes $\Longrightarrow$ (resp. $\Longleftrightarrow$) pour désigner une implication (resp. une équivalence). Ces signes n'apparaissent que placés entre deux propositions dans des formules mathématiques. On évitera de les utiliser dans du texte.

1.1 Ensembles et applications.

Dans ce cours, on se base sur une notion intuitive d'ensemble. On dira qu'un élément x d'un ensemble E appartient à E et on notera "$x \in E$". On utilisera les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection d'ensembles. Étant donnés deux ensembles E et F, l'intersection $E \cap F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{et}\, x \in F\}$. La réunion $E \cup F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{ou}\, x \in F\}$. On note par $\emptyset$ l'ensemble vide c'est-à-dire l'ensemble sans élément. On dit que E est inclu dans F, on note $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F.
On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments et si et seulement si l'un est inclu dans l'autre et l'autre est inclu dans le premier. On a donc, pour deux ensembles E et F, les équivalences :

$$(E = F) \iff \big(\forall x\,, \quad (x \in E) \iff (x \in F)\big) \iff \big((E \subset F) \quad \text{et} \quad (F \subset E)\big)\,.$$

Si un ensemble A est inclu dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les ensembles de nombres entiers naturels, de nombres entiers relatifs, de nombres rationnels, de nombres réels et de nombres complexes, respectivement. On rappelle que l'on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Étant donnés deux ensembles E et F, on note par $E \times F$ le produit cartésien de E par F c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Lorsque $E = F$, on note $E \times F$ par E^2. De même, le produit $E \times E \times E$ est noté E^3. Plus généralement, le produit de n copies de E (où n est un entier naturel non nul) est noté E^n (avec la convention $E^1 = E$).
Une application f de E dans F est la donnée pour chaque $x \in E$ d'un unique élément de F que l'on note $f(x)$. On note alors $f : E \longrightarrow F$. Cela revient à se donner une partie G de l'ensemble $E \times F$ qui vérifie la propriété :

$$\forall\, x \in E\,, \quad \forall\,(y; y') \in F^2\,, \quad \Big(\big((x; y) \in G\big) \text{ et } \big((x; y') \in G\big)\Big) \implies \big(y = y'\big)\,.$$

On note par Id_E l'application de E dans E qui, à $x \in E$, associe x.
Soit $f : E \longrightarrow F$. Pour une partie A de E, l'image $f(A)$ de A par f est la partie de F définie par

$$f(A) \ := \ \{f(x)\,,\, x \in A\}\,.$$

Pour une partie B de F, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) \ := \ \{x \in E\,;\ f(x) \in B\}\,.$$

Lorsqu'on a une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow G$, on définit la composée de g par f comme étant l'application $(g \circ f) : E \longrightarrow G$ qui, à $x \in E$, associe $g(f(x))$.
On rappelle qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite injective si

$$\forall\,(x; x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) = f(x')) \implies (x = x')\big)\,.$$

On dit qu'une telle application est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,.$$

Lire

On remarque que cette dernière proposition est équivalente à $(f(E) = F)$.
Une telle application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective si elle est injective et surjective. Cette propriété est équivalente à

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists!\, x \in E\,; \quad y \;=\; f(x)\,.$$

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dit qu'elle est bijective de E sur son image $f(E)$ car l'application $f_1 : E \longrightarrow f(E)$ donnée par $f_1(x) = f(x)$ est bijective.
Prenons une application bijective $f : E \longrightarrow F$. L'application $g : F \longrightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, est bijective et on a $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si $h : F \longrightarrow E$ vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $h = g$. On appelle g la bijection réciproque de f et on la note $f^{\langle -1 \rangle}$.
On rappelle que la composée de deux applications injectives est injective, que la composée de deux applications surjectives est surjective. En particulier, la composée de deux applications bijectives est bijective.
Ces propriétés sont justifiées dans le paragraphe 9.1.1.

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application $* : (E \times E) \longrightarrow E$. Pour $(x; y) \in E^2$, on note l'image $*((x; y))$ de $(x; y)$ par $*$ aussi par $*(x; y)$ et par $x * y$.
On dit qu'une telle loi $*$ est commutative si

$$\forall\, (x; y) \in E^2\,, \quad x * y \;=\; y * x\,.$$

On dit qu'une telle loi $*$ est associative si

$$\forall\, (x; y; z) \in E^3\,, \quad x * (y * z) \;=\; (x * y) * z\,.$$

On dit qu'un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si

$$\forall\, x \in E\,, \quad x * e \;=\; e * x \;=\; x\,.$$

Si $*$ admet deux éléments neutres e et e' alors on a $e * e' = e'$, car e est un élément neutre, et $e * e' = e$, car e' est un élément neutre. Donc $e = e'$.
On dit qu'un élément $x \in E$ a un symétrique pour la loi $*$ d'élément neutre e s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = e = \; y * x$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ (l'addition), qui est commutative et associative et qui a 0 pour élément neutre. 0 est le seul élément ayant un symétrique pour l'addition. L'ensemble $\mathbb{N}$ est aussi muni d'une loi de composition interne x (la multiplication), qui est commutative et associative et qui a 1 pour élément neutre. 1 est le seul élément ayant un symétrique pour la multiplication.

On définit la relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbb{N}$.

Définition 1.1. *Soit $(m; n) \in \mathbb{N}^2$. On dit que m est inférieur à n, on note $m \leq n$, s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $n = m + d$. On dit que m est strictement inférieur à n, on note $m < n$, s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = m + d$.*

On remarque que l'on utilise les mêmes symboles "$\leq$" et "$<$" que pour la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, ce qui ne pose pas de problème puisque l'on peut voir la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ comme la restriction à $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On introduit une notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$.

Définition 1.2. *Soit $(a; b) \in \mathbb{N}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[\![a; b]\!] \;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a \leq n \text{ et } n \leq b\}\,, \quad [\![a; b[\![\;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a \leq n \text{ et } n < b\}\,,$$

$$]\!]a; b]\!] \;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a < n \text{ et } n \leq b\} \quad \text{et} \quad]\!]a; b[\![\;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a < n \text{ et } n < b\}\,.$$

Vu en cours

On définit aussi Vu en cours

$$[\![a; +\infty[\![:= \{n \in \mathbb{N};\ a \le n\}, \quad]\!]a; +\infty[\![:= \{n \in \mathbb{N};\ a < n\}.$$

Toute ces parties de $\mathbb{N}$ sont les intervalles de $\mathbb{N}$.

Lire

On précise les notions d'ensemble fini et de cardinal.

Définition 1.3. *Soit E un ensemble. On dit que E est un ensemble fini s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ de E, deux à deux distincts, tels que $E = \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. Dans ce cas, p est unique et s'appelle le cardinal de E. Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini.*
On décide que l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est fini de cardinal 0.

On **admet** maintenant le théorème de récurrence suivant.

Théorème 1.4. Théorème de récurrence.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\ (\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1))\big) \Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big).$$

Voyons un exemple d'application de ce théorème. On veut montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \ge n + 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soir $\mathcal{P}(n) = (2^n \ge n+1)$. Comme $2^0 = 1 \ge 0+1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \ge n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \ge 2n+2$ soit $2^{n+1} \ge 2(n+1) \ge n+2 = (n+1)+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que le membre de gauche de l'implication dans le théorème 1.4 est vrai pour $n_0 = 0$. Donc, le théorème nous donne la validité du membre de droite de cette implication et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

A-t-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \ge 2n+1$? C'est vrai pour $n = 0$, faux pour $n = 1$ et $n = 2$. Cela semble vrai pour $n \ge 3$. Montrons-le par récurrence.
Pour $n \ge 3$ soit $\mathcal{Q}(n) = (2^n \ge 2n+1)$. On a $2^3 = 8 \ge 7 = 2 \cdot 3 + 1$. Donc $\mathcal{Q}(3)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \ge 3$, $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \ge 2n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \ge 2(2n+1)$. Comme, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$2(2p+1) \ge 2(p+1)+1 \iff 2p \ge 1 \iff p > 0,$$

Laissé

on a, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \ge 2(2n+1) \ge 2(n+1)+1$, car $n \ge 3$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème 1.4, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \ge 3$.

On termine ce paragraphe en rappelant des propriétés basiques des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Ces ensembles sont munis d'une loi de composition interne $+$ (l'addition), qui est commutative et associative et qui a 0 pour élément neutre. En fait, chaque ensemble a sa propre addition et on devrait les noter différemment pour les différentier. Pour chaque ensemble, tout élément admet un symétrique pour la loi $+$, que l'on nomme "opposé". En particulier, pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}\}$, on a

$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3, \ \big(a+c = b+c \iff a = b\big).$$

Ces ensembles sont aussi munis d'une loi de composition interne x (la multiplication, aussi notée $\cdot$), qui est commutative et associative et qui a 1 pour élément neutre. Un symétrique pour la multiplication est appelé un "inverse". -1 et 1 sont les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont un inverse pour la multiplication dans

LIre

Lire

$\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, tout élément non nul a un inverse. Dans tous les cas, 0 n'a pas d'inverse. On a les propriétés suivantes. Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z};\mathbb{Q};\mathbb{R};\mathbb{C}\}$,

$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3\,,\; a\cdot(b+c) \;=\; (a\cdot b) + (a\cdot c)\,.$$

Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q};\mathbb{R};\mathbb{C}\}$, en posant $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\setminus\{0\}$,

$$\forall (a;b;c) \in (\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*)\,,\; \big(a\cdot c = b\cdot c \iff a = b\big)\,.$$

1.2 Intervalles, bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$.

On donne ici des propriétés supplémentaires de $\mathbb{R}$. Celles qui sont **admises** sont liées à la construction (compliquée) de $\mathbb{R}$, qui est hors programme.

On admet que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$. Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, l'une (au moins) des deux propositions suivantes

$$(a \leq b) \quad \text{et} \quad (b \leq a)$$

est vraie. Si elles sont toutes deux vraies alors, nécessairement, $a = b$. Lorsque $(a \leq b)$ est vraie, on dit que "a est inférieur à b" (ou bien "a est inférieur ou égal à b"). Lorsque $(a \leq b)$ est vraie et a est différent de b, on dit que "a est strictement inférieur à b" et on note "$a < b$". Autrement dit, la proposition $(a < b)$ est, par définition, la proposition

$$\big((a \leq b) \quad \text{et} \quad (a \neq b)\big)\,.$$

On rappelle que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall\,(a;b;c) \in \mathbb{R}^3\,, \quad \Big((a+c \leq b+c) \iff (a \leq b)\Big)\,, \tag{1.1}$$

$$\forall\,(a;b) \in \mathbb{R}^2\,, \forall\,c > 0\,, \quad \Big((a\cdot c \leq b\cdot c) \iff (a \leq b)\Big)\,, \tag{1.2}$$

$$\forall\,(a;b) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \Big((-a \leq -b) \iff (b \leq a)\Big)\,. \tag{1.3}$$

Remarque 1.5. *Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$. On a les implications suivantes :*

$$\big(a \leq b \leq c \leq d \implies 0 \leq c-b \leq d-a\big)\,, \quad \big(a < b \leq c \leq d \implies 0 \leq c-b < d-a\big)\,,$$

$$\big(a \leq b < c \leq d \implies 0 < c-b \leq d-a\big)\,, \quad \big(a \leq b \leq c < d \implies 0 \leq c-b < d-a\big)\,.$$

On **admet** la propriété suivante, dite propriété d'Archimède : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n plus grand que x, i.e.

$$\forall\,x \in \mathbb{R}\,, \quad \exists\,n \in \mathbb{N}\,; \quad n \geq x\,. \tag{1.4}$$

On introduit maintenant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.6. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[a;b] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x \text{ et } x \leq b\}\,, \quad [a;b[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x \text{ et } x < b\}\,,$$

$$]a;b] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \text{ et } x \leq b\} \quad \text{et} \quad]a;b[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x \text{ et } x < b\}\,.$$

On introduit les symboles $+\infty$ (dit "plus infini") et $-\infty$ (dit "moins infini") et on définit

$$[a;+\infty[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a \leq x\}\,, \quad]a;+\infty[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x\}\,,$$

$$]-\infty;a] \;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; x \leq a\} \quad \text{et} \quad]-\infty;a[\;:=\; \{x \in \mathbb{R}\,;\; x < a\}\,.$$

Les intervalles $]a;b[$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$ sont dits ouverts, les intervalles $[a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$ sont dits fermés. Les autres sont dits semi-ouverts.

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont que des notations commodes pour décrire certains intervalles. Plus loin, on les utilisera aussi pour les notions de bornes supérieure et inférieure et de limite infinie. En tout cas, ils ne représentent pas des nombres réels. On ne peut donc pas les considérer comme des éléments de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.7. *Lorsque $b \leq a$, $]a;b[$ est vide. Lorsque $b < a$, $[a;b]$ est aussi vide. En particulier, $]a;a[$ est vide. L'intervalle $[a;a]$ a un unique élément. On dit que cet ensemble est un singleton.*

Remarque 1.8. *Si x appartient à un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors il existe $(x_1;x_2) \in I^2$ avec $x_1 < x < x_2$. En particulier, on a $x \in]x_1;x_2[$ et $]x_1;x_2[\subset [x_1;x_2] \subset I$. On peut vérifier ce point en considérant séparément les trois cas d'intervalle ouvert.*

Définition 1.9. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$. Soit $m \in \mathbb{R}$.*
On dit que m majore A (m est un majorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \leq m\,.$$

On dit que A est majorée si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que M majore A.
On dit que m minore A (m est un minorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \geq m\,.$$

On dit que A est minorée si A admet un minorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que M minore A.
On dit que m est un (le) plus grand élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m majore A. Dans ce cas, on note $m = \max A$.
On dit que m est un (le) plus petit élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m minore A. Dans ce cas, on note $m = \min A$.

On peut vérifier que, lorsqu'une partie A a un plus grand élément alors celui-ci est unique. Ainsi les propositions (m est un plus grand élément de A) et (m est le plus grand élément de A) sont équivalentes. C'est pourquoi on a inséré "(le)" dans la définition de plus grand élément. On a bien sûr la même chose avec les plus petits éléments.
Considérons quelques exemples. La partie $A := [0;1]$ de $\mathbb{R}$ est majorée. En effet 2 est un majorant de A. 3 aussi. 1 aussi. Comme 1 appartient à A, c'est le plus grand élément de A.
La partie $B := [0;1[$ est aussi majorée. Elle est majorée par 2, 3 et 7. Mais elle n'admet pas de plus grand élément. On peut vérifier ce fait en raisonnant par l'absurde.
Supposons que b soit le plus grand élément de B. Alors $b \in B$ et b majore B. Comme $b \in B$, $0 \leq b < 1$. Il existe $c \in]b;1[$ (par exemple $c = (1+b)/2$). On a $c \in B$ et $b < c$. Comme b majore B, b est plus grand que chaque élément de B, donc, en particulier, $b \geq c$. On a donc une contradiction avec $b < c$.
La partie $C = [3;+\infty[$ n'est pas majorée. Vérifions ce point.
Supposons qu'un réel m majore C. On a, en particulier, $m \geq 3$. Donc $m+1 \geq 3$ et $(m+1) \in C$. Comme m majore C, m est, en particulier, plus grand que $m+1$. Contradiction.
De manière similaire, on vérifie que A est minorée et que 0 est son minimum, que $]0;7[$ est minorée mais n'a pas de minimum, que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.

Proposition 1.10. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et B une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Si A est finie alors A admet un maximum et un minimum.*
2. *B admet un minimum.*
3. *On a l'équivalence suivante : B est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset [\![0;q]\!]$.*
4. *On peut reformuler l'équivalence précédente sous la forme :*

$$\Big((B \text{ est infinie}) \iff (\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, n \in B\,;\; n > q) \Big)\,.$$

5. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.*

Admise

Preuve : Voir la preuve de la proposition 9.4. □

Les intervalles $[\![a;b]\!]$ avec $a \leq b$ et $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ sont finis. Les intervalles $]\!]a;+\infty[\![$ avec $a \in \mathbb{N}$, sont infinis.
Les ensembles

$$2\mathbb{N} \;:=\; \{2n\,;\; n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N}+1 \;:=\; \{2n+1\,;\; n \in \mathbb{N}\}$$

sont infinis.
Vérifions tout cela.
L'intervalle $[\![a;b]\!]$ est inclu dans $[\![0;b]\!]$, car $a \geq 0$. Par le 3 de la proposition 9.4, il est fini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. On a $q+a+1 \in \mathbb{N}$, $q+a+1 > q$ et $q+a+1 > a$ donc $n := q+a+1$ est un élément de $]\!]a;+\infty[\![$ qui vérifie $n > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $]\!]a;+\infty[\![$ est infini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour $n := q+1$, on a $2n \geq n > q$. L'élément $2n$ de $2\mathbb{N}$ vérifie $2n > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $2\mathbb{N}$ est infini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour $n := q$, on a $2n+1 > n = q$. L'élément $2n+1$ de $2\mathbb{N}+1$ vérifie $2n+1 > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $2\mathbb{N}+1$ est infini.

Soit A un partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On **admet** que l'ensemble non vide des majorants réels de A a un plus petit élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ majore } A\}$ a un minimum.
De même, pour une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$, on **admet** que l'ensemble non vide des minorants réels de A a un plus grand élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ minore } A\}$ a un maximum.
Ces deux propriétés ne sont pas valables pour les parties de $\mathbb{Q}$. On peut trouver une partie non vide et majorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ majore } A\}$ n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. On peut aussi trouver une partie non vide et minorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ minore } A\}$ n'a pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.
L'absence de ces propriétés dans $\mathbb{Q}$ et leur importance pour les limites est l'une des raisons pour lesquelles on va travailler dans $\mathbb{R}$, dont la construction compliquée est admise.

Définition 1.11. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
Lorsque A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant réel de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas majorée, on décide que la borne supérieure de A est $+\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\sup A$ *la borne supérieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
Lorsque A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand minorant réel de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas minorée, on décide que la borne inférieure de A est $-\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\inf A$ *la borne inférieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Il est commode d'utiliser la **convention** suivante : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Pour une partie non vide A de $\mathbb{R}$, $+\infty$ en est un majorant et $-\infty$ en est un minorant. **Attention :** $+\infty$ est un majorant non réel de A et $-\infty$ est un minorant non réel de A, puisque $+\infty$ et $-\infty$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$.

Proposition 1.12. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
On a $\inf A \leq \sup A$.
On a

$$\big((\sup A) \in A\big) \iff \big(A \text{ admet un maximum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\sup A = \max A$.
On a

$$\big((\inf A) \in A\big) \iff \big(A \text{ admet un minimum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\inf A = \min A$.

Preuve :

a). Soit $a \in A$. Par définition de $\inf A$, $\inf A$ minore A donc $\inf A \leq a$. Par définition de $\sup A$, $\sup A$ majore A donc $a \leq \sup A$. D'où $\inf A \leq a \leq \sup A$.

b). Preuve de la première équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A \in A$. Donc $\sup A$ est un réel et un majorant de A. Comme il appartient à A, c'est le maximum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un maximum m. m est un nombre réel qui majore A et qui appartient à A. A est donc majorée. Soit m' un majorant de A. m' majore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \geq m$. m est donc le plus petit majorant de A, i.e. $m = \sup A$.

Laissé

c). Preuve de la deuxième équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A \in A$. Donc $\inf A$ est un réel et un minorant de A. Comme il appartient à A, c'est le minimum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un minimum m. m est un nombre réel qui minore A et qui appartient à A. A est donc minorée. Soit m' un minorant de A. m' minore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \leq m$. m est donc le plus grand majorant de A, i.e. $m = \inf A$. □

On a vu plus haut que 1 est le maximum de $[0;1]$. La proposition nous permet d'affirmer que $1 = \sup [0;1]$. De même, 0 est le minimum de $[0;1]$ et la proposition nous donne que $0 = \inf [0;1]$.
On a aussi vu que l'ensemble $[0;1[$ n'a pas de maximum. Mais il a forcément une borne supérieure. Quelle est-elle ? Comme cet ensemble est majorée par 5, $\sup [0;1[\in \mathbb{R}$. On devine que $\sup [0;1[= 1$. Vérifions-le. Pour simplifier l'écriture, on pose $A := [0;1[$.
Tout d'abord, 1 est bien un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit majorant de A. Supposons le contraire. Il existe donc un majorant m de A tel que $m < 1$. Comme $(1+m)/2 \in]m;1[$ et $m \geq 0$, $(1+m)/2 \in [0;1[= A$. Comme m majore A, $m \geq (m+1)/2$ soit, par (1.2), $2m \geq m+1$ et, par (1.1), $m \geq 1$. Contradiction avec $m < 1$.
On a donc montré que 1 est le plus petit majorant de $[0;1[$, soit $\sup [0;1[= 1$.

2 Voisinages dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On introduit plusieurs notions de voisinage dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. Celles-ci seront utiles pour la définition des limites de suite et de fonction.

2.1 Voisinages d'un point dans $\mathbb{C}$.

Dans le paragraphe 9.1.3, on donne une construction de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ ainsi que quelques propriétés de cette fonction. On rappelle que la fonction module est la fonction $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$|z| \; := \; \sqrt{x^2 + y^2} \; = \; \sqrt{z \cdot \overline{z}} \,, \tag{2.1}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. Elle possède les propriétés suivantes : le module du zéro de $\mathbb{C}$ est nul, le module d'un nombre complexe non nul est strictement positif, le module d'un produit est le produit des modules, le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme de modules. Autrement dit, on a :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \,, \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0 \big) \,, \tag{2.2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \,, \quad |\overline{z}| = |z| \,, \tag{2.3}$$

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2 \,, \quad |zz'| \; = \; |z| \cdot |z'| \tag{2.4}$$

et

$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z+z'| \;\leq\; |z| \,+\, |z'|\,. \tag{2.5}$$

La propriété (2.5) s'appelle l'inégalité triangulaire. Une formulation équivalente de cette proposition est

$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| \,-\, |z'|\big| \;\leq\; |z \,-\, z'|\,. \tag{2.6}$$

En désignant, pour $z \in \mathbb{C}$, par $\Re(z)$ sa partie réelle et par $\Im(z)$ sa partie imaginaire, on a

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \Big(\big(|\Re(z)| \,\leq\, |z|\big) \quad \text{et} \quad \big(|\Im(z)| \,\leq\, |z|\big)\Big)\,. \tag{2.7}$$

On note que, pour $z \in \mathbb{C}$, $|-z| = |z|$, d'après (2.4).
Les propriétés précédentes sont démontrées dans le paragraphe 9.1.3 (cf. proposition 9.12).

Définition 2.1. *Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$D(z_0;r[\,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; |z \,-\, z_0| \,<\, r\big\} \quad \textit{et} \quad D(z_0;r] \,:=\, \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; |z \,-\, z_0| \,\leq\, r\big\}\,.$$

Le premier ensemble est appelé le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r tandis que le second est appelé le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.

On remarque que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0;0[$ est vide et $D(z_0;0]$ est le singleton $\{z_0\}$. Lorsque $r > 0$, on peut vérifier que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, $D(z_0;r[$ et $D(z_0;r]$ sont des ensembles infinis. En effet, ils contiennent tous les deux l'ensemble infini

$$\Big\{z_0 \,+\, \frac{r}{2n}\,;\; n \in \mathbb{N}^*\Big\}\,.$$

On remarque aussi que la restriction à $D(z_0;r]$ de la fonction module est majorée par $|z_0| + r$. On pourra vérifier ce point en utilisant (2.6).

Considérons deux disques ouverts (resp. fermés), l'un de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_0 \in \mathbb{R}^+$ et l'autre de centre $z_1 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r_1 \in \mathbb{R}^+$. À quelle condition les deux disques s'intersectent-ils ? À quelle condition l'un des disques est inclu dans l'autre ? La proposition suivante répond à ces questions.

Proposition 2.2. *Soit $(z_0;z_1) \in \mathbb{C}^2$ et $(r_0;r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.*

1. *On suppose $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$. On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0[\cap D(z_1;r_1[\;\neq\; \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \,<\, r_0 + r_1\,. \tag{2.8}$$

2. *On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0] \,\cap\, D(z_1;r_1] \;\neq\; \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \,\leq\, r_0 + r_1\,.$$

3. *On suppose $r_0 > 0$. On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0[\subset\, D(z_1;r_1[\quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1\,.$$

4. *On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0] \,\subset\, D(z_1;r_1] \quad \Longleftrightarrow \quad |z_0 - z_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1\,.$$

Preuve : À faire en td. □

Définition 2.3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est un voisinage (complexe) de z_0 s'il existe $r > 0$ tel que le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $D(z_0;r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{z_0}$ l'ensemble des voisinages (complexes) de z_0.*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Les disques ouverts $D(z_0; r_0[$, pour $r_0 > 0$, sont tous des voisinages de z_0. Les disques fermés $D(z_0; r_0]$, pour $r_0 > 0$, sont tous aussi des voisinages de z_0. Mais z_0 admet des voisinages qui ne sont pas des disques. Par exemple, les ensembles

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_0) \in [-1; 1]\big\} \quad \text{et} \quad \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \in] - 1; 2]\big\}$$

sont des voisinages de z_0. En effet, on peut vérifier qu'ils contiennent tous les deux le disque ouvert $D(z_0; 1/2[$. En revanche, l'ensemble

$$B \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \geq 0\big\}$$

n'est pas un voisinage de z_0. Vérifions ce point en raisonnant par l'absurde. Supposons que B soit un voisinage de z_0. Alors, par définition, il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Le nombre complexe $z_0 - ir/2$ appartient au disque $D(z_0; r[$ car $|(z_0 - ir/2) - z_0| = | - ir/2| = r/2 < r$. Donc, par l'inclusion précédente, il appartient aussi à B. On doit donc avoir $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) \geq 0$. Or $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) = \Im(-ir/2) = -r/2 < 0$. Contradiction. On a donc montré par l'absurde que B n'est pas un voisinage de z_0.

2.2 Voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que la fonction valeur absolue est la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $|x| = \max\{-x; x\}$ (où l'existence du maximum est assuré par la proposition 1.10). C'est la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction module (cf. paragraphe 9.1.3). C'est pourquoi on utilise la même notation pour ces deux fonctions. Les propriétés du module se transmette à la valeur absolue. On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \big(|x| = 0 \iff x = 0\big)\,, \tag{2.9}$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |xx'| \ = \ |x| \cdot |x'|\,, \tag{2.10}$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |x + x'| \ \leq \ |x| \, + \, |x'| \tag{2.11}$$

et

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big||x| \, - \, |x'|\big| \ \leq \ |x \, - \, x'|\,. \tag{2.12}$$

La propriété (2.11) est l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et la proposition (2.12) en est une utile reformulation équivalente.

On introduit maintenant dans $\mathbb{R}$ une notion similaire à la notion de disque dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.4. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$I(x_0; r[\ := \ \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x \, - \, x_0| \ < \ r\big\} \quad \textit{et} \quad I(x_0; r] \ := \ \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x \, - \, x_0| \ \leq \ r\big\}\,.$$

On appelle ces ensembles l'intervalle ouvert centré en x_0 de rayon r et l'intervalle fermé centré en x_0 de rayon r, respectivement.

Le nom "intervalle" dans cette définition est justifié par la

Proposition 2.5. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $I(x_0; r[=]x_0 - r; x_0 + r[$ et $I(x_0; r] \ = \ [x_0 - r; x_0 + r]$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, les deux équivalences suivantes sont vraies :*

$$\big(|x \, - \, x_0| \ < \ r\big) \iff \big(x_0 - r \ < \ x \ < \ x_0 + r\big)\,,$$

$$\big(|x \, - \, x_0| \ \leq \ r\big) \iff \big(x_0 - r \ \leq \ x \ \leq \ x_0 + r\big)\,.$$

Preuve : Notons que la première équivalence est aussi ($x \in I(x_0;r[\iff x \in]x_0 - r; x_0 + r[$), la seconde est aussi ($x \in I(x_0;r] \iff x \in [x_0 - r; x_0 + r]$). La validité de ces équivalences donnent donc les égalités d'ensembles annoncées.
En utilisant (1.1) puis (1.3), on a

$$\big(x_0 - r \,<\, x \,<\, x_0 + r\big) \iff \big(-r \,<\, x \,-\, x_0 \,<\, r\big) \iff \Big(\big(x \,-\, x_0 \,<\, r\big) \text{ et } \big(-(x \,-\, x_0) \,<\, r\big)\Big)$$

et, en utilisant le fait que, pour $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \max(-a; a)$, on a

$$\Big(\big(x \,-\, x_0 \,<\, r\big) \text{ et } \big(-(x \,-\, x_0) \,<\, r\big)\Big) \iff \big(|x \,-\, x_0| \,<\, r\big)\,.$$

On a montré la première équivalence. Pour montrer l'autre, on peut suivre les mêmes arguments en remplaçant partout les "$<$" par des "$\leq$". □

On remarque que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$,

$$I(x_0;r[\;=\; D(x_0;r[\cap \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I(x_0;r] \;=\; D(x_0;r] \cap \mathbb{R}\,. \tag{2.13}$$

On peut déterminer à quelle condition deux tels intervalles du même type s'intersectent et à quelle condition l'un est inclu dans l'autre.

Proposition 2.6. *Soit $(x_0;x_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(r_0;r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.*

1. *On suppose $r_0 > 0$ et $r_1 > 0$. On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0[\cap I(x_1;r_1[\;\neq\; \emptyset \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,<\, r_0 + r_1\,.$$

2. *On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0] \,\cap\, I(x_1;r_1] \;\neq\; \emptyset \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,\leq\, r_0 + r_1\,.$$

3. *On suppose $r_0 > 0$. On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0[\subset\, I(x_1;r_1[\quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1\,.$$

4. *On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0] \,\subset\, I(x_1;r_1] \quad \iff \quad |x_0 - x_1| \,+\, r_0 \,\leq\, r_1\,.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 et d'utiliser (2.13). □

Définition 2.7. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage (réel) de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que l'intervalle ouvert centré en x_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $I(x_0;r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{x_0}$ l'ensemble des voisinages (réels) de x_0.*

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, les intervalles ouverts (resp. fermés) centrés en x_0 et de rayon $r > 0$ sont des voisinages de x_0 et sont des ensembles infinis. Le singleton $\{x_0\}$, en revanche, n'est pas un voisinage de x_0. En effet, il ne peut contenir un $I(x_0;r[$ avec $r > 0$, qui est infini, puisqu'il est un ensemble fini.

Attention : Pour alléger les notations, on a noté, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, de la même façon $\mathcal{V}_{x_0}$ deux ensembles différents : l'ensemble des voisinages réels de x_0 et l'ensemble des voisinages complexes du complexe x_0. L'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\, \Re(z) \in]-1;1[\,, \Im(z) = 0\}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{R}$ et, en tant que telle, c'est un voisinage réel de 0. Comme partie de $\mathbb{C}$, ce n'est pas un voisinage complexe de 0.
Quand on utilise le mot "voisinage" ou la notation $\mathcal{V}_{x_0}$, il y a donc un risque de confusion et, dans ce cas, on précisera "voisinage réel" ou "voisinage complexe", "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{R}$ ou "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{C}$.

La notion suivante sera aussi importante pour l'étude des limites.

HP = hors programme

Définition 2.8. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point adhérent à A si, pour tout $r > 0$, $I(x_0; r[$ rencontre A, i.e. $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$.*

4 est un point adhérent à $[1; 7[$ puisque tout voisinage de 4 rencontre $[1; 7[$ en, au moins, 4. On peut vérifier que 7 est aussi un point adhérent à $[1; 7[$. Mais 0 n'est pas adhérent à $[1; 7[$ car l'intervalle ouvert $]-1; 1[$ centré en 0 ne rencontre pas $[1; 7[$.

HP

Pour l'étude des limites de fonctions, il est utile d'introduire la notion de voisinage réel dans une partie non vide $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.9. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On dit qu'une partie A de $\mathcal{D}$ est un voisinage dans D de a si c'est la trace sur $\mathcal{D}$ d'un voisinage réel de a, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_a$ tel que $A = \mathcal{D} \cap B$. On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.*

Dans la définition précédente, le fait que a soit adhérent à $\mathcal{D}$ assure que les voisinages dans $\mathcal{D}$ de a sont non vides.

2.3 Voisinages, dans $\mathbb{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour l'étude des limites, il sera commode de disposer d'une notion de voisinage réel pour les symboles $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 2.10. *Soit A un partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset A$.
On dit que A est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; a[\subset A$.
On note par $\mathcal{V}_{+\infty}$ (resp. $\mathcal{V}_{-\infty}$) l'ensemble des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Contrairement aux voisinages d'un point, qui contiennent le point en question, un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ne contient pas $+\infty$ (resp. $-\infty$) puisqu'il est une partie de $\mathbb{R}$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$ (resp. $-\infty \notin \mathbb{R}$). Pour $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $]a; +\infty[$ et $[a; +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$. L'ensemble $\{0\} \cup [1; +\infty[$ n'est pas un intervalle mais est un voisinage de $+\infty$. En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.

Définition 2.11. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que $+\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{+\infty}, \quad A \cap B \neq \emptyset .$$

On dit que $-\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $-\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{V}_{-\infty}, \quad A \cap B \neq \emptyset .$$

On remarque que $+\infty$ est adhérent à $[1; +\infty[$. En utilisant la propriété d'Archimède (1.4), on peut vérifier que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.

HP

Pour l'étude des limites de suites, il est utile d'introduire la notion de voisinage de $+\infty$ dans une partie infinie de $\mathbb{N}$.
Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 1.10, $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie finie de $\mathbb{N}$ mais est adhérent à une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 2.12. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit qu'une partie A de D est un voisinage dans D de $+\infty$ si c'est la trace sur D d'un voisinage dans $\mathbb{R}$ de $+\infty$, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $A = D \cap B$. On note par $\mathcal{V}_{+\infty}^{D}$ l'ensemble des voisinages dans D de $+\infty$.*

HP

Pour une partie infinie D de $\mathbb{N}$, les voisinages dans D de $+\infty$ ne sont pas vides, puisque $+\infty$ est adhérent à D (cf. proposition 1.10).

Pour l'étude des limites de fonctions, il est utile d'introduire la notion de voisinage réel de $-\infty$ (resp. de $+\infty$) dans une partie non vide $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.13. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \{-\infty; +\infty\}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On dit qu'une partie A de $\mathcal{D}$ est un voisinage dans D de a si c'est la trace sur $\mathcal{D}$ d'un voisinage réel de a, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_a$ tel que $A = \mathcal{D} \cap B$. On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.*

Dans la définition précédente, le fait que a soit adhérent à $\mathcal{D}$ assure que les voisinages dans $\mathcal{D}$ de a sont non vides.

2.4 Propriétés des voisinages.

On établit ici des propriétés des différents types de voisinages vus précédemment. On donne aussi des propriétés sur la notion d'adhérence. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Proposition 2.14. *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $\ell \in \mathbb{C}$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

1. *Si $\ell \in \mathbb{K}$, un voisinage de ℓ contient forcément ℓ comme élément, i.e.*
$$\forall A \in \mathcal{V}_\ell, \quad \ell \in A.$$
2. *L'intersection de deux voisinages de ℓ est un voisinage de ℓ, i.e.*
$$\forall (A; B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2, \quad A \cap B \in \mathcal{V}_\ell.$$
3. *Une partie de $\mathbb{K}$ contenant un voisinage de ℓ est elle-même un voisinage de ℓ, i.e.*
$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{K}), \left((\exists B \in \mathcal{V}_\ell;\ B \subset A) \implies A \in \mathcal{V}_\ell \right).$$

Preuve :

1. On sépare le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ du cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Pour $A \in \mathcal{V}_\ell$, il existe $r > 0$ tel que $D(\ell; r[\subset A$. Comme $\ell \in D(\ell; r[$, $\ell \in A$.
Laissé
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Pour $A \in \mathcal{V}_\ell$, il existe $r > 0$ tel que $I(\ell; r[\subset A$. Comme $\ell \in I(\ell; r[$, $\ell \in A$.
2. On sépare en quatre cas.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2$. Par définition, il existe $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $D(\ell; r_A[\subset A$ et $D(\ell; r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A; r_B) > 0$. On a $D(\ell; r[\subset D(\ell; r_A[\subset A$ et $D(\ell; r[\subset D(\ell; r_B[\subset B$ donc $D(\ell; r[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de ℓ.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2$. Par définition, il existe $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $I(\ell; r_A[\subset A$ et $I(\ell; r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A; r_B) > 0$. On a $I(\ell; r[\subset I(\ell; r_A[\subset A$ et $I(\ell; r[\subset I(\ell; r_B[\subset B$ donc $I(\ell; r[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de ℓ.
Laissé
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Par définition, il existe des réels $b_A > 0$ et $b_B > 0$ tels que $]b_A; +\infty[\subset A$ et $]b_B; +\infty[\subset B$. Soit $b = \max(b_A; b_B)$. On a $]b; +\infty[\subset]b_A; +\infty[\subset A$ et $]b; +\infty[\subset]b_B; +\infty[\subset B$ donc $]b; +\infty[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de $+\infty$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Par définition, il existe des réels $b_A > 0$ et $b_B > 0$ tels que $]-\infty; -b_A[\subset A$ et $]-\infty; -b_B[\subset B$. Soit $b = \max(b_A; b_B)$. On a $]-\infty; -b[\subset]-\infty; -b_A[\subset A$ et $]-\infty; -b[\subset]-\infty; -b_B[\subset B$ donc $]-\infty; -b[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de $-\infty$.

3. On sépare en quatre cas.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de ℓ. Il existe donc $r > 0$ tel que $D(\ell; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $D(\ell; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_\ell$.

Laissé

Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de ℓ. Il existe donc $r > 0$ tel que $I(\ell; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $I(\ell; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_\ell$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de $+\infty$. Il existe donc $b > 0$ tel que $]b; +\infty[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $]b; +\infty[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de $-\infty$. Il existe donc $b > 0$ tel que $]-\infty; b[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $]-\infty; b[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$. □

La propriété de séparation suivante sera importante dans la suite du cours.

Proposition 2.15. *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$ avec $\ell \neq \ell'$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $\ell \neq \ell'$. Alors il existe un voisinage de ℓ et un voisinage de ℓ' qui ne se rencontrent pas, i.e.*

$$\exists\, (A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}\, ; \quad A \cap B \;=\; \emptyset\, .$$

Preuve : On sépare en deux cas.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Prenons $z_1 \neq z_0$ dans $\mathbb{C}$. Donc $|z_1 - z_0| > 0$. Soit $r = |z_1 - z_0|/2 > 0$. Pour $r_1 = r$ et $r_2 = r$, le membre de droite de l'équivalence (2.8) est faux donc celui de gauche aussi. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r_1[$ sont donc disjoints. Comme $r > 0$, le premier est un voisinage de z_0 et le deuxième un voisinage de z_1.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Il suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut trouver un voisinage de $-\infty$, un voisinage de a et un voisinage de $+\infty$ qui ne se rencontrent pas, deux à deux, i.e.

$$\exists\, (A; B; C) \in \mathcal{V}_{-\infty} \times \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_{+\infty}\, ; \quad \big((A \cap B \;=\; \emptyset) \text{ et } (A \cap C \;=\; \emptyset) \text{ et } (B \cap C \;=\; \emptyset) \big)\, .$$

Soit $\delta > 0$, $A :=]-\infty; a - \delta[$, $B := I(a; \delta[=]a - \delta; a + \delta[$ et $C :=]a + \delta; +\infty[$. On a $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$, $B \in \mathcal{V}_a$ et $C \in \mathcal{V}_{+\infty}$. De plus, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$. □

HP

Remarque 2.16. *On peut vérifier que les résultats des propositions 2.14 et 2.15 sont encore valables pour des voisinages dans une partie infinie de $\mathbb{N}$ et pour des voisinages dans une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

On dispose de la caractérisation suivante des voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.17. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I qui contient x_0 et qui est inclu dans A. Autrement dit : $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$I \subset A \quad \text{et} \quad x_0 \in I\, .$$

Preuve :
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est un voisinage de x_0. Il existe donc $r > 0$ tel que $I(x_0; r[\subset A$. On a $x_0 \in I(x_0; r[$ et $I(x_0; r[$ est un intervalle ouvert par la proposition 2.5.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et inclu dans A. On sait qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_0 \in]x_1; x_2[$ et $]x_1; x_2[\subset I$ (cf. remarque 1.8). Soit $r = \min(|x_0 - x_1|; |x_0 - x_2|) > 0$. On va montrer que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Si $x \in I(x_0; r[$, on a, par la proposition 2.5,

$$x_1 \;=\; x_0 \,-\, |x_0 - x_1| \;\leq\; x_0 \,-\, r \;<\; x \;<\; x_0 + r \;\leq\; x_0 \,+\, |x_0 - x_2| \;=\; x_2\, .$$

Donc $x \in]x_1; x_2[$. On a montré que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Or $]x_1; x_2[\subset I$ et $I \subset A$ donc $I(x_0; r[\subset A$. A est donc un voisinage de x_0. □.

On dispose aussi d'une caractérisation d'un point adhérent à une partie.

Proposition 2.18. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Tout élément de A est un point adhérent à A. De plus, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$(x_0 \textit{ est un point adhérent à } A) \iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0} .$$

Preuve : Prenons un $x_0 \in A$. Pour tout $r > 0$, $x_0 \in I(x_0; r[$ donc $x_0 \in I(x_0; r[\cap A$ et $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$. On a montré que a est adhérent à A.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Dire que $I(x_0; r[$ rencontre A équivaut à dire que $I(x_0; r[$ n'est pas inclu dans le complémentaire de A, c'est-à-dire :

$$I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset \iff I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A) .$$

Laissé

On a donc

$$\begin{aligned}(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) &\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset\big) \\ &\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\ &\iff \text{non } \big(\exists\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\ &\iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0} .\end{aligned}$$

On obtient donc l'équivalence cherchée. □

3 Suites réelles et complexes.

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et définir une notion de limite pour de telles suites.

3.1 Définitions et premiers exemples.

On introduit ici les notions de suite réelle et de suite complexe simultanément. Pour ce faire, le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$, pour les suites réelles, soit $\mathbb{C}$, pour les suites complexes.

Définition 3.1. *Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D est le domaine de définition de la suite u. Pour $n \in D$, la valeur de u en n, à savoir $u(n)$, est aussi notée par u_n. C'est un élément de $\mathbb{K}$. On désigne parfois u par $(u_n)_{n \in D}$. Lorsque D est finie, on dit que u est une suite finie. Lorsque D est infinie, on dit que u est une suite infinie.*
L'ensemble des suites définies sur une partie non vide D de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^D$.
Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite réelle. Une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée suite complexe.

On va surtout s'intéresser aux suites infinies car, pour celles-ci seulement, on aura une notion de limite.

Considérons quelques exemples de suites réelles.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/(n+1)$. Soit $D = [\![3; +\infty[\![$ et $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1/n$. Bien que ces trois suites se ressemblent, elles sont différentes.
Soit $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ si n est pair, et $x_n = -1$, si n est impair. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une formule pour x_n à savoir $x_n = (-1)^n$. Donc $x = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit $y : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = n$, si $n \leq 7$, et $y_n = -1$, si $n > 7$. On remarque que y n'est pas une suite constante mais elle est constante égale à -1 à partir du rang 8, c'est-à-dire si l'on