progrm

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$
   (a) Distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, boule de centre M_0 et de rayon r : $B(M_0; r)$
   (b) Suites dans $\mathbb{R}^2$, convergence.
   (c) Définitions de la frontière d'un ensemble $A : \partial A$.
   (d) Définition d'ouvert(si $\partial A \cap A = \varnothing$), fermé(si $\partial A \subset \partial A$), intérieur, adhérence, borné, compact de $\mathbb{R}^2$ (ce sont les fermés bornés).
   (e) Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{R}^2$.
   (f) Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, représentation graphique, définition séquentielle de la continuité. Opérations algébriques, notation de landau.
   (g) Fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. Différentiabilité des fonctions de deux variables
   (a) Dérivées partielles, interprétation géométrique.
   (b) Définition des fonctions de classe C^1, développement limité d'ordre 1 pour les fonctions de deux variables de classe C^1. Notation de la différentielle df.
   (c) Opérations algébriques, composition pour les fonctions de classe C^1.
   (d) Définition de maximum, minimum, extremum, local, global.
   (e) Lien entre extremum et point critique.
   (f) Dérivées partielles secondes, énoncé de Schwartz (admis), DL_2 (admis).
3. Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$
   (a) Continuité et classe C^1 à l'aide des fonctions coordonnées.
   (b) Dérivée partielle, écriture matricielle, DL_1.
   (c) Jacobien, interprétation géométrique.
   (d) Composition, définition de difféomorphismes, exemples, dessins.
4. Courbes
   (a) Graphes de fonction, courbes paramétrées, et courbes définies par une équation.
   (b) Pour chacune des trois définitions, définition de la tangente.
   (c) Maximum d'une fonction définie sur une courbe (courbes paramétrées et peut-être équation avec fonctions implicites intuitif).
   (d) Longueur d'une courbe paramétrée : $\int_a^b \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t$.
5. Intégrales doubles
   (a) Le cours est très intuitif et ne contient pas de preuve, l'introduction se fait avec un pavage du plan à l'aide de petits rectangles.
   (b) Théorème de Fubini.
   (c) Théorème du changement de variable (interprétation géométrique), cas du passage en polaire.

Intégrales généralisées
(c) Théorème du changement de variable ... de la limite en b de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

6. Intégrales généralisées
   (a) Pour des fonctions continues par morceaux sur $[a; b[$ on regarde la limite en b de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Convergence, convergence absolue.
   (c) Opérations algébriques pour la convergence.
   (d) Pour les fonctions positives, équivalence entre F bornée et l'intégrale converge.
   (e) Critère de convergence : convergence absolue, majoration, équivalence.
7. Intégrales dépendant d'un paramètre
   (a) Intégrale dont une borne dépend de la variable.
   (b) Intégrale sur un segment : Continuité, dérivabilité, intégrale.
   (c) Intégrale définie sur un intervalle quelconque : propriété de domination.
   (d) Introduction aux théorèmes de continuité et de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale généralisée.
8. Séries numériques
   (a) Rappel sur les suites.
   (b) Convergence, convergence absolue.
   (c) Critère de convergence pour les séries à termes positifs : majoration, équivalent, D'Alembert, Cauchy.
   (d) Séries de Riemann.
   (e) Séries alternées.
   (f) Vitesse de convergence d'une série numérique.
   (g) Produit de Cauchy.
9. Suites et séries de fonctions
   (a) Convergence simple pour les suites de fonctions, convergence normale (CN) pour les séries de fonctions.
   (b) Théorème sur la continuité de la somme d'une série pour la CN (admis), puis intégration. Dérivée de la somme d'une série pour la CN.
10. Séries entières
    (a) Définition du rayon de convergence comme borne supérieure, intervalle et disque de convergence.
    (b) Continuité, intégrale, dérivabilité.
    (c) Applications à la combinatoire.
11. Séries de Fourier
    (a) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\mathrm{d}t$; $a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$; $b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$
    (b) Utilisation de la périodicité et de la parité.
    (c) Théorème de Dirichlet(admis). Théorème de Parseval(admis).

Chap. 1 Analyse de $\mathbb{R}^2$.

1. Topologie

Distance. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé

Déf. : $M = (x, y)$, $M' = (x', y')$.

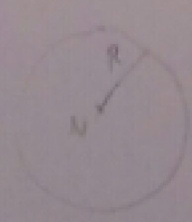
$$d(M, M') := \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Déf. Soit $N \in \mathbb{R}^2$, $R \geq 0$.

Boule ouverte de centre N de rayon R (disque) fermée

est : $B(N, R[:= \{M \in \mathbb{R}^2, d(M,N) < R\}$

$B(N, R] := \{M \in \mathbb{R}^2 ; d(M,N) \leq R\}$



Rq. Il existe d'autres distances sur $\mathbb{R}^2$

$d_1(M, M') = \max(|x - x'|, |y - y'|)$

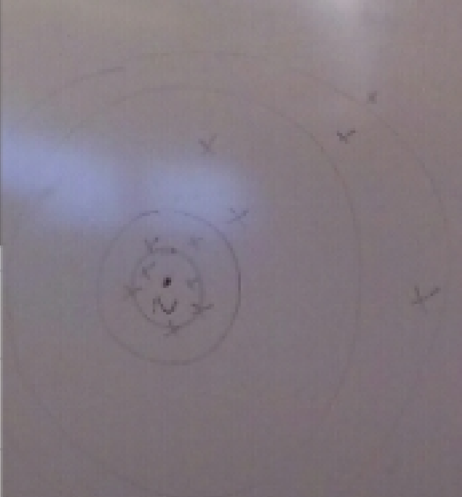
$d_2(M, M') = |x - x'| + |y - y'|$.

Suites de $\mathbb{R}^2$

Déf : Soit $(M_n)_n \in \underbrace{(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}}$ ens des suites de $\mathbb{R}^2$. Soit $N \in \mathbb{R}^2$.

On dit que $(M_n)_n$ cv vers N (on note $N = \lim M_n$)

si $\lim d(M_n, N)$ existe et vaut 0.



Prop. Soit $(M_n)_n \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$. Soit $N = (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$\forall n$, $M_n = (x_n, y_n)$

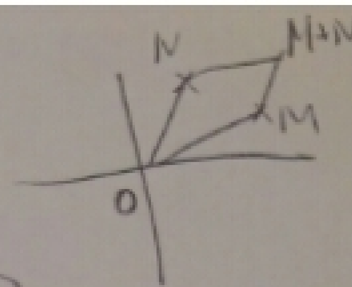
lim M_n = N ⇔ ($\lim x_n = x'$ et $\lim y_n = y'$)

Preuve

$\Rightarrow$) $\forall n$, $0 \leq |x_n - x'| = \sqrt{(x_n - x')^2} \leq \underbrace{\sqrt{(x_n - x')^2 + (y_n - y')^2}}_{d(M_n, N)}$

$\lim x_n = x'$ (gendarmes)

de même $\lim y_n = y'$.



$\iff d(M_n, N) = \sqrt{(x_n - x') + (y_n - y')^2} \to 0$

Déf : $M, N \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$M + N :=$ le point P de $\mathbb{R}^2$ $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{ON}$

$(M + N = (x + x', y + y'))$

$\alpha M :=$ le point P de $\mathbb{R}^2$ tq $\vec{OP} = \alpha \vec{OM}$

$(\alpha M = (\alpha x, \alpha y))$

Prop : Si $\lim M_n = M$ et $\lim P_n = P$ alors $\lim M_n + P_n$ existe et vaut $M + P$

Si $\lim M_n = M$, $\lim \alpha M_n$ existe et vaut αM.

Démo (partielle)

Par hyp $\lim \overset{(x_n, y_n)}{M_n} = M$ et $\lim P_n = P$

Par ①, $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$

Par le L1, $\lim x_n + x'_n = x + x'$

$\lim y_n + y'_n = y + y'$

Par ② (pour la suite $(M_n + P_n)_n$) $\lim M_n = N$

$\lim M_n = N \underset{②}{\overset{①}{\iff}} (\lim x_n = x' \text{ et } \lim y_n = y')$

Bases de la Topologie

On note par $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ l'ens des parties de $\mathbb{R}^2$.

$A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ $\complement A = \{M \in \mathbb{R}^2 ; M \in A\}$ (complémentaire)

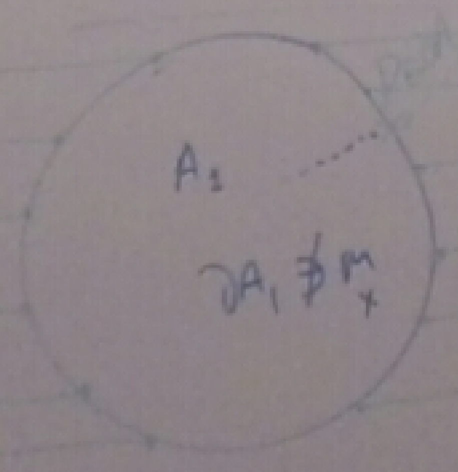
Déf. : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

On définit la frontière de A (notée ∂A)

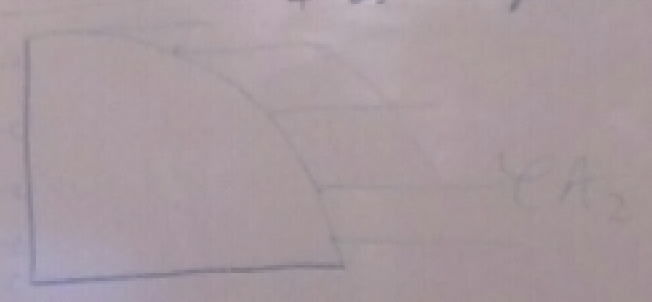
$$\partial A = \left\{ M \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \begin{array}{l} M \text{ est limite d'une suite d'élé. de } A \\ \text{et } M \text{ ——— de } \complement A \end{array} \right\}$$

A_1 : la zone blanche à l'intérieur de la courbe.

∂A_1 est la courbe bleue.



A_2 : la zone blanche à l'intér. de la courbe + les 2 segments



∂A_2 : la courbe (partie bleue ouverte)

Prop. $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$

$\complement \complement A = A$, $\partial \complement A = \partial A$

Dém. : admise.

Convention

$\partial B(0,$

Déf. A

A es

Convention $\partial \emptyset = \emptyset$

$\partial \mathbb{R}^2 = \emptyset$

$$\partial B(0,1[= \{ M \in \mathbb{R}^2 ;\ d(0,M) = 1 \}$$
$$= \partial B(0,1]$$

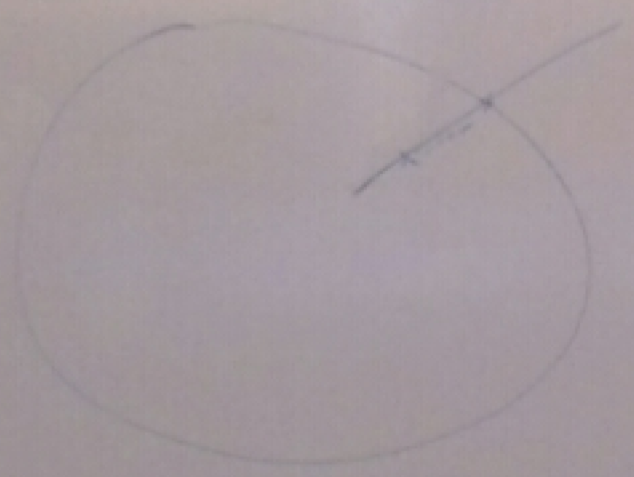
Déf. $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

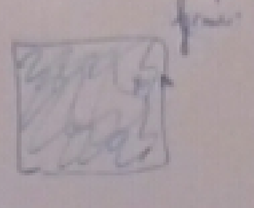
A est (un) ouvert si $A \cap \partial A = \emptyset$

$(\partial A \subset \complement A)$.

A est (un) fermé si $A \supset \partial A$.

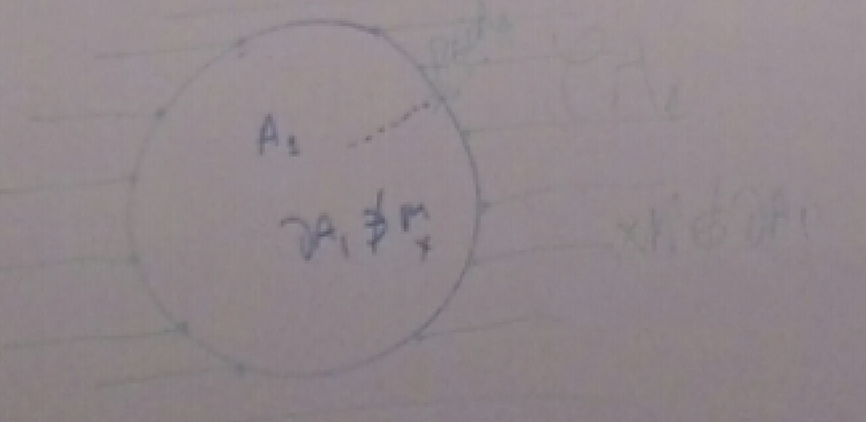
Idée intuitive d'un ouvert





Ex. A_1 est ouvert

$\complement A_1$ est fermé.



A_2 est ni ouvert ni fermé

Prop. : $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

A ouvert $\iff$ $\complement A$ est fermé

Preuve

A ouv. $\iff A \cap \partial A = \emptyset$

$\iff \partial A \subset \complement A$

cf. $\partial A = \partial \complement A$

$\iff \partial \complement A \subset \complement A$

$\iff \complement A$ est fermé.

Prop : A est fermé ssi pour toute $(M_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ (suite d'élé. de A) cv., $\lim M_n \in A$.

$\Leftarrow)$ A est-il fermé ? $A \supset \partial A$?

Soit $N \in \partial A$. Par déf. de ∂A,

il existe $(M_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$; $N = \lim M_n$.

Par hyp., $N = \lim M_n \in A$. D'où $\partial A \subset A$

et A est fermé.

$\Rightarrow)$

On

supp

⇒) On supp. A fermé

On montre par l'absurde

$\forall (M_n) \in A^{\mathbb{N}}$ cv., $\lim M_n \in A$.

Supposons le contraire de ↑ il existe

$(M_n) \in A^{\mathbb{N}}$ cv. tq. $\lim M_n = N \notin A$.

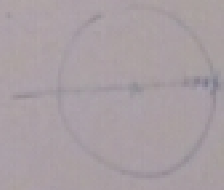
$N \in \complement A$. $N = \lim (N)_n$ donc

N est limite d'une suite d'élé de $\complement A$.

D'où $N \in \partial A$.

or A est fermé donc $A \supset \partial A$

donc $N \in A$ Contr.



Rq.: $M_n = (0 ; 1 - \frac{1}{n})$, $n \geq 1$

$\forall n$, $M_n \in B(0,1[$

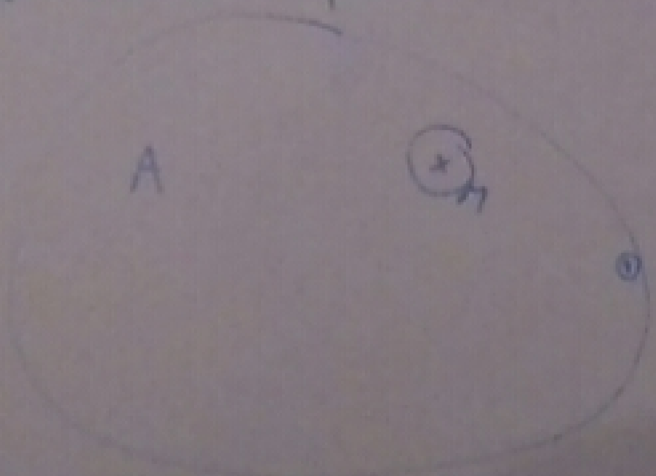
$\lim M_n = (0,1) \notin B(0;1[$.

Prop. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ On a

$\forall M \in A, \exists \varepsilon > 0 ; B(M;\varepsilon[\subset A$.

Dém.: admise

A zone blanche capturée



Déf

L'i

L'e

Déf : $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

L'intérieur de A : $\mathring{A} := A \setminus \partial A \; (= A \cap \complement \partial A)$

L'adhérence de A : $\overline{A} = A \cup \partial A$

Rq : $\bar{A}$ est tjs fermé, $\mathring{A}$ est tjs ouv

Prop : A ouv. $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

A fermé $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Déf

$\partial A \to$ frontière de A

$\complement A \to$ complémentaire de A

$(M_n)_n \to$ suite M_n

$\mathring{A} \to$ intérieur de A

$\overline{A} \to$ adhérence de A

Déf : * Une prop P vraie au voisinage d'un pt M est une prop vraie sur un ouvert contenant M.

* une partie A de $\mathbb{R}^2$ est bornée s'il existe $R \geq 0$ tq

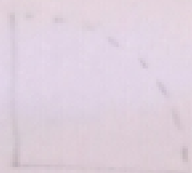
$$A \subset B(0; R].$$

* Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est compacte si elle est fermée et bornée.

A_1

∂A)

A_2



$A_1 = \mathring{A}_1$, $\overline{A_1} = A_1 \cup \partial A_1$

$\mathring{A}_2 = A_2 \setminus \{2 \text{ segments}\} \neq A_2$

$\overline{A_2} = A_2 \cup \{\text{courbe}\} \neq A_2$

Rappels sur $\mathbb{R}$

* Toute partie A
admet une borne (

Rappels sur $\mathbb{R}$

toute partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (inférieure) finie ou infinie.

sup A $= +\infty$ si A n'est pas majorée

sup A = le plus petit des maj. de A si A est majorée

* Toute suite monotone a une limite.
* On peut extraire d'une suite des s-suites.

(si $u_n \longrightarrow \ell$ et φ injection $\nearrow$, $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$)

* Th. sur les suites adjacentes.
* Th. des segments emboîtés. (I_n) suite d'int. fermés t.q. $\forall n$, $I_{n+1} \subset I_n$

Alors $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$

* Th. de Bolzano-Weierstrass

Th. (Bol

Soit K u

Alors il ex

(dans K).

Dém.

Th (Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^2$)

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. Soit $(M_n) \in K^{\mathbb{N}}$.

Alors il existe φ inj $\nearrow$ t.q. $(M_{\varphi(n)})_n$ cv (dans K).

<u>Dém</u> : $M_n = (x_n, y_n)$ On supp $K \subset B[0,R]$

$\forall n$, $\begin{matrix}|x_n| \\ |y_n|\end{matrix} \le \|\vec{OM_n}\| \le R$ $(x_n)_n$ et (y_n) sont bornées.

Par Bolzano-Weierstrass de $\mathbb{R}$, $\exists \varphi_1$ inj. $\nearrow$ t.q. $x_{\varphi_1(n)}$ cv. vers x. La suite $(y_{\varphi_1(n)})$ est bornée

Par B.W, $\exists \varphi_2$ inj $\nearrow$ t.q. $y_{\varphi_2(\varphi_1(n))}$ cv vers y

$(x_{\varphi_2(\varphi_1(n))})_n$ est extraite de $(x_{\varphi_1(n)})$

qui cv. vers x donc

$\lim x_{\varphi_2(\varphi_1(n))} = x$.

Soit $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$. On a

$\lim x_{\varphi(n)} = x$

$\lim y_{\varphi(n)} = y$.

Par une prop

lim M

(De plus,

Par une prop préc.

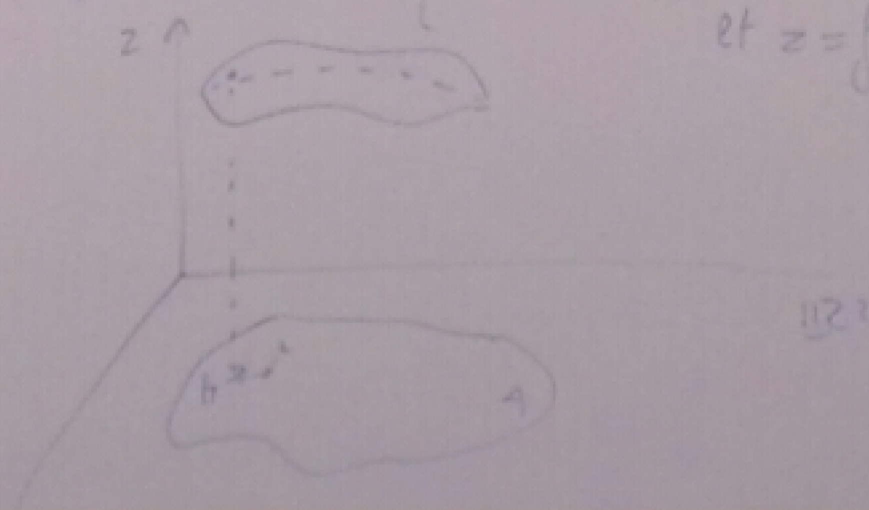
$$\lim M_{\varphi(n)} = (x, y)$$

(De plus, $(x,y) \in K$ car K est fermé).

Continuité

Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$

graphe de f : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x,y) \in A$ et $z = f(x,y)\}$



si A est majorée

Déf : Soit $f : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $M \in A$. On dit que f est cont. en M si pour toute suite $(M_n)_n$ d'élé de A qui converge vers M, $(f(M_n))_n$ cv. vers $f(M)$.

On dit que f est conti. sur $B \subset A$ si f est conti en tout pt de B.

Soit $M \in \bar{A}$ et $\ell \subset \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en M si pour toute suite $(M_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui cv. vers M, $(f(M_n))_n$ cv. vers ℓ.

(on note l = lim f)

est conti. en

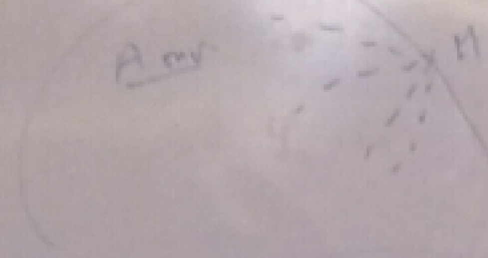
l'élt. de A

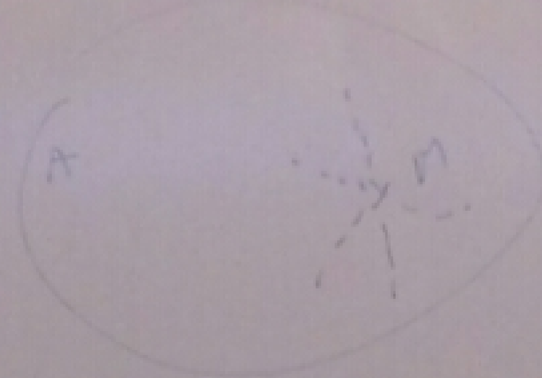
CV. vers $f(M)$

f tend vers l

$\in A^{\mathbb{N}}$ qui CV

l.





Rq : • Soit $M \in A$

f conti. en $M \iff f(M) = \lim_M f$

* Une fonct. cte est conti sur son domaine de déf. (conti. de déf.)

Prop Soit $A \in \mathcal{P}$

f, g $A \longrightarrow \mathbb{R}$

Si $\lim_M f = l \in \mathbb{R}$,

Prop : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $M \in \bar{A}$,

$f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $\lim_M f = l \in \mathbb{R}$, $\lim_M g = l' \in \mathbb{R}$ alors

$\lim_M (f+g) = l + l'$, $\lim_M \lambda f = \lambda l$,

$\lim_M fg = l l'$.

Dém. admise

Prop. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ un ouv
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

* Soit $M_0 \in A$ et $f : A \to \mathbb{R}$ conti en M_0 tq. $f(A) \subset I$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ conti en $f(M_0)$. Alors $g \circ f$ est bien déf. et conti en M_0.

Preuve admise.

ex : $f : \mathbb{R}$
$(x,$

★ Soit $t_1, t_2 : I \to \mathbb{R}$ conti en t_0
tq. $\{(t_1(t) ; t_2(t)) ; t \in I\} \subset A$
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ conti en $(t_1(t_0) ; t_2(t_0))$
Alors $I \to t \to f(t_1(t), t_2(t))$ est conti en t_0.

<u>Preuve admise</u>

ex : ★ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad (M \mapsto d(0 ; M))$
$(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ conti (à vérif.)

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto t^3$ conti

Par composition $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^{3/2}$ est conti

★ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x^2 y - 13y^4$ conti (à vérif.)

$$\left.\begin{array}{l} t_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto t^2 \\ t_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto t^3 \end{array}\right\} \text{conti} \qquad \left.\begin{array}{l} g(t) = f(t_1(t), t_2(t)) \\ \quad = (t^2)^2 \times t^3 - 13(t^3)^4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par composit}^\circ \\ g \text{ est conti} \end{array}$$

Th. Soit K un compact de $\mathbb{R}$

Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ cont

Alors f est bornée et atteint ses bornes. C'est-à-dire

$f(K)$ est borné dans $\mathbb{R}$

$\exists M \in K,\ f(M) = \sup f(K)$

$\exists N \in K,\ f(N) = \inf f(K)$

Prop : So

$f, g : A \rightarrow$

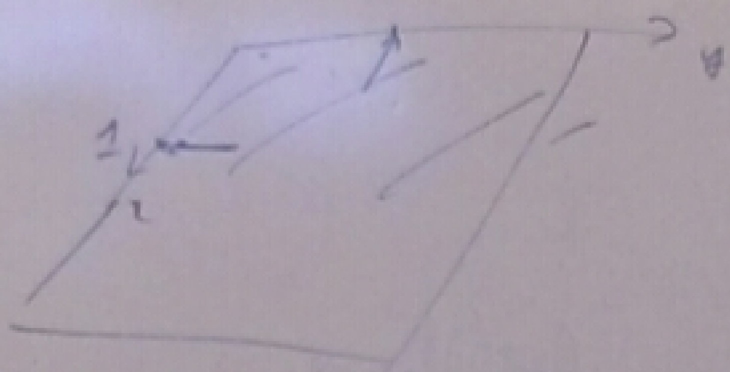
Si $\lim_{M}$

$\lim_{M}$

$\lim_{M}$

Dém. :

Soit (M



$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

or

Prop. : $P_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto x$, $P_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto y$

sont continues.

p_1 est conti. en $M = (x_0 ; y_0)$

Soit $(M_n) \longrightarrow M$. $\quad p_1(M_n) = x_n$.

or $d(M_n, M) \longrightarrow 0$ et $0 \leq |x_n - x_0| \leq \underbrace{\sqrt{|x_n - x_0|^2 + |y_n - y_0|^2}}_{= d(M_n, M)}$

donc $\lim |x_n - x_0| = 0$. (Gendarme).

Donc $\lim x_n = x_0$ soit $\lim p_1(M_n) = p_1(M)$.

Ceci étant vrai pour toute suite $(M_n)_n$ cv. vers M,

p_1 est conti. en M

De m., p_2 est conti. en M.

Intérêt

$f(x,y)$

$f(x,y) =$

$g(t)$

Intérêt

$$f(x,y) = x^2 y - 3y^7.$$

$$f(x,y) = \left(p_1(x,y)\right)^2 p_2(x,y) - 3\left(p_2(x,y)\right)^7$$

$g(t) : t \longrightarrow t^7$ conti

par composition, $(x,y) \longmapsto \left(p_2(x,y)\right)^7$ est conti

par produit $(x,y) \longmapsto -3\left(p_2(x,y)\right)^7$ est conti.

Par produit, p_1^2 est

et $p_1^2 p_2$

Par somme f est

Par produit, p_1^2 est conti.

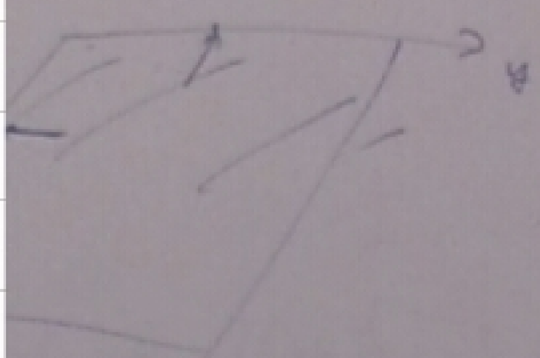
et $p_1^2 p_2$ aussi.

Par somme f est conti.

Par produit, p_1^2 est conti.
et $p_1^2 p_2$ conti.

Par somme f est conti.

thierry.jecko@u-cergy.fr



$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

$p_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x$, $p_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto y$

sont continues.

p_1 est conti.

(Soit $(M_n) \longrightarrow M$

or $d(M_n, M)$ -

d'une lim $|x$

Donc li

Ceci étant