Examen :

Seul document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite au style bleu avec le nom de l'étudiant.

Produit de séries entières.

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de ray. de cv $R_1>0$ et $R_2>0$ respectivement.

Soit $R=\min(R_1,R_2)>0$.

Prop : $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ cv. abs. dans $D(0,R[$ et

$$\forall z\in D(0,R[,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right).$$

Preuve : on applique simplement le produit de Cauchy aux séries abs. cv. $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ dans $D(0,R[$.

Intégration d'une série entière.

Prop : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de ray. de cv. $R>0$. Alors, pour $-R<x<R$,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$$

Preuve : on a vu que le ray. de cv. d'une série est égale à celui de sa série dérivée. Donc le rayon. de $\sum \frac{a_n x^n}{n+1}$ est aussi R.

Par le Th. d'inté. des séries de fonct on a, pour $x\in]-R;R[$,

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Développement en série entière

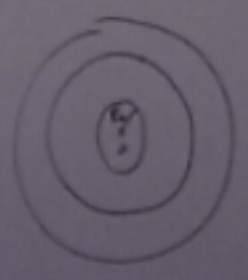
Prop : Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de ray. de cv. R_1 et R_2 resp. telle qu'il existe $R_0<\min(R_1,R_2)$ avec

$$\forall z\in\mathbb{C} \text{ avec } |z|\leq R_0,\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

Alors

$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=b_n$

et $R_1=R_2$.



Donc, par div par z^{n+1},

$$a_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_n z^{k-(n+1)} = b_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_n z^{k-(n+1)}$$

Donc, par div. par z^{n+1},

$$a_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^{k-(n+1)} = b_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k z^{k-(n+1)}$$

On remplace z par $x \in]-R_0; R_0[$ et on fait tendre $x \to 0$.

On obtient $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récu. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Par Cauchy-Hadamard, $R_1 = R_2$.

<u>Rq</u> : Ce résultat est encore vrai pour des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

<u>Déf</u> : Soit $f : D(0, R_0[\longrightarrow \mathbb{C}$ $(R_0 > 0)$ $]-R_0; R_0[\longrightarrow \mathbb{C}$ admet un dév. en série entière (DSE) sur $D(0, R_0[$

<u>Exemples</u> : $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ <u>Cont.</u>

On a vu que, pour $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ et le rayon de cv. est 1

Donc f admet un DSE sur $]-1, 1[$

Soit g la primitive de f qui s'annule en 0

On a $g :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -\ln(1-x)$.

<u>Examen</u> :

Seul document autorisé : feuille A4 manuscrite au stylo bleu avec le nom de l'étudiant.

Soit S_1 (resp. S_2) la somme de $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$)

On montre par récu. $\mathcal{P}(n) = \{\forall k \in [0; n], a_k = b_k\}$

On a $a_0 = S_1(0) = S_2(0) = b_0$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie. Pour $0 \leq |z| \leq R_0$,

(HR) $$\cancel{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} + a_{n+1} z^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} a_k z^k = \cancel{\sum_{k=0}^{n} b_k z^k} + b_{n+1} z^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} b_k z^k$$

S'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ ($\sum a_n x^n$) de rayon de cv. $R \geq R_0$ t.q.

$$\forall z \in D(0; R[, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

<u>Rq</u> : Si f admet un DSE sur $D(0; R_0[$ alors celui-ci est unique par la prop. précédente.

Examen :

Seul document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite au stylo bleu avec le nom de l'étudiant.

Par intégration, on a, pour $|x|<1$,

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\,dt}_{g(x)} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Donc $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\quad (-t)^n = (-1)^n t^n$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. $\quad x=-t$.

et $\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n}$.

En particulier :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \overbrace{o(x^N)}^{\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}}$$

(qd $x \to 0$)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'éq. diff. lin. :

(*) $y' = \frac{\alpha}{(1+x)} y$ sur $]-1,1[$.

Soit y_0 la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de ray. de cv. $R>0$.

On suppose que y_0 est sol. sur $]-R,R[$ de (*). sur $]-R;R[$,

$$y_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\frac{\alpha}{1+x} y_0(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k \right) x^n$$

Comme y_0 est sol. de (*), on a

pour tout n : $(n+1) a_{n+1} = \alpha (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$

$a_1 = \alpha \times 1 \times a_0$

$2a_2 = -\alpha (a_0 - a_1) = -\alpha(1-\alpha) a_0$.

$a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_0$.

par récu.

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$$

Si $a_0 = 0$, $\sum a_n x^n$ est la série nulle.

$a_0 \neq 0$ RC de $\sum a_n x^n$: R_1

$x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{n!\,|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-(n+1)+1)\,a_0|\,|x|^{n+1}}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|\,|x|^n\,(n+1)!}$$

$$= \frac{|x|}{n+1} |\alpha - n| = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1} |x| \underbrace{\left|\frac{\alpha}{n} - 1\right|}_{\to 1}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

Pour $|x|<1$, $\sum a_n x^n$ cv. par le test de D'Alembert.

Donc $R_1 \geq 1$. Donc $\sum a_n x^n$ cv. abs. sur $]-1,1[$.

Examen

Seul document autorisé : 1 feuille A4 manuscrite au stylo bleu avec le nom de l'étudiant.

Pour $a_0 \in \mathbb{R}$ qcq, y_0 est bien sol de $(*)$ sur $]-1,1[$, les formules précédentes sont vraies.

$$y_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n$$

et $$\frac{\alpha}{1+x} y_0(x) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} a_k \right) x^n.$$

et $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\cdots \right) x^n$$

or l'ens. des sol. de $(*)$ est

$\{ k\, y_1 \,;\, k \in \mathbb{R} \}$ où

$$y_1(x) = e^{\int_0^x \frac{\alpha\, dt}{1+t}} = e^{\alpha \ln(1+x)} = (1+x)^{\alpha}$$

donc il existe a_0 t.q.

$$y_0(x) = (1+x)^{\alpha}$$

pour $x \in]-1;1[$.

Donc $(1+x)^{\alpha}$ admet un DSE sur $]-1;1[$.

En fait $a_0 = y_0(0) = (1+0)^{\alpha} = 1$

Donc, pour $x \in]-1;1[$,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Rq : on peut chercher en suivant la méthode précédente une sol. particulière d'une éq. diff.

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \text{ sur }]-\delta, \delta[$$

dans le cas où a, b et c ont un DSE $\delta > 0$ sur $]-\delta;\delta[$

Fonction exponentielle (complexe)

On a vu en L_1 que la primitive de $0 < x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 (à savoir $\ln$) est bij. de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On a défini l'exponentielle

réelle comme étant la bij réc. de ln

On étudie la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

<u>Rayon de cv</u> : $R = R_1 = \sup\left\{|z| ; \left(\frac{z^n}{n!}\right)_n \text{ bornée}\right\}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $N = E(|z|) + 1$

$n \geq N$. $\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{(n+1)} \leq 1$

Donc $\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{z^n}{n!}\right|$

La suite $\left(\frac{|z|^n}{n!}\right)$ est bornée par

$\max\left\{1 ; \frac{|z|}{1!}, \frac{|z|^2}{2!}, \dots, \frac{|z|^N}{N!}\right\}$

Ceci est vrai aussi si $z = 0$.

Donc $R_1 \geq |z|$ ceci quelque soit $z \in \mathbb{C}$.

Donc $R_1 = R = +\infty$

<u>Déf</u> : Soit $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)$$

<u>Rq</u> : $\exp(0) = 1$

<u>Prop</u> : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$