Proposition 2.18. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Tout élément de A est un point adhérent à A. De plus, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) \iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0} .$$

Preuve : Prenons un $x_0 \in A$. Pour tout $r > 0$, $x_0 \in I(x_0; r[$ donc $x_0 \in I(x_0; r[\cap A$ et $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$. On a montré que a est adhérent à A.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Dire que $I(x_0; r[$ rencontre A équivaut à dire que $I(x_0; r[$ n'est pas inclu dans le complémentaire de A, c'est-à-dire :

$$I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset \iff I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A) .$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) &\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset\big) \\
&\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\
&\iff \text{non } \big(\exists\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\
&\iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0} .
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équivalence cherchée. □

3 Suites réelles et complexes.

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et définir une notion de limite pour de telles suites.

3.1 Définitions et premiers exemples.

On introduit ici les notions de suite réelle et de suite complexe simultanément. Pour ce faire, le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$, pour les suites réelles, soit $\mathbb{C}$, pour les suites complexes.

Définition 3.1. *Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D est le domaine de définition de la suite u. Pour $n \in D$, la valeur de u en n, à savoir $u(n)$, est aussi notée par u_n. C'est un élément de $\mathbb{K}$. On désigne parfois u par $(u_n)_{n\in D}$. Lorsque D est finie, on dit que u est une suite finie. Lorsque D est infinie, on dit que u est une suite infinie.*
L'ensemble des suites définies sur une partie non vide D de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^D$.
Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite réelle. Une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée suite complexe.

On va surtout s'intéresser aux suites infinies car, pour celles-ci seulement, on aura une notion de limite.

Considérons quelques exemples de suites réelles.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/(n+1)$. Soit $D = [\![3; +\infty[\![$ et $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1/n$. Bien que ces trois suites se ressemblent, elles sont différentes.
Soit $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ si n est pair, et $x_n = -1$, si n est impair. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une formule pour x_n à savoir $x_n = (-1)^n$. Donc $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $y : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = n$, si $n \leq 7$, et $y_n = -1$, si $n > 7$. On remarque que y n'est pas une suite constante mais elle est constante égale à -1 à partir du rang 8, c'est-à-dire si l'on

oublie les 7 premiers termes.
Pour un entier naturel n, la formule

$$\frac{7n+5}{n(n-3)}$$

a un sens exactement quand $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;3\}$ et le résultat est un nombre réel. On peut donc définir une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D = \mathbb{N} \setminus \{0;3\}$ et, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

On peut aussi considérer la suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D' = [\![4;+\infty[\![$ et, pour $n \in D'$,

$$v_n \;=\; \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

C'est en fait la restriction de u à D'.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$\frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

Lire

n'a de sens que si $n \notin \{4k;\, k \in \mathbb{N}\} := 4\mathbb{N}$. En posant $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$, qui est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$, la suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

est bien définie.
Considérons maintenant des exemples de suites complexes.
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i^n$. En notant par exp l'exponentielle complexe, soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $v \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(in\pi/6)$. Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (1/n) + (i/n^2)$.

3.2 Suites récurrentes.

Une importante classe de suites est formée par les suites récurrentes que l'on va définir ici. On va voir deux types de suite récurrente : les suites récurrentes associées à une fonction, d'une part, et les séries (et produits), d'autre part. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2.1 Suites récurrentes associées à une fonction.

On se donne une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On veut construire de proche en proche une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ en choisissant $u_0 \in \mathcal{D}$, en posant $u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite. Est-on sûr de définir ainsi une suite ? Est-on sûr d'en définir qu'une, une fois que u_0 a été choisi ?
Un premier problème est le suivant : il se pourrait que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \mathcal{D}$. Dans ce cas, nous serions dans l'incapacité de définir u_{n+1} puisque l'on ne peut appliquer f à u_n. C'est précisément ce qui se passe dans l'exemple suivant : on prend $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $u_0 = 2$. On a bien $u_0 \in [1;+\infty[$ donc $u_1 = f(u_0) = f(2) = 1$. On a bien $u_1 \in [1;+\infty[$ donc $u_2 = f(u_1) = f(1) = 0$.

Lire

Mais $u_2 \notin [1;+\infty[$.
On va voir que l'on peut éviter ce problème en imposant que l'image de la fonction f soit incluse dans son domaine de définition.
Le second problème est lié au fait que l'on doit définir u_n pour **tout** $n \in \mathbb{N}$. Pour un n explicite, par exemple $n = 10$, on peut le faire en calculant successivement les termes $u_1, \cdots, u_9$ puis définir u_{10} par

$f(u_9)$. Comme on doit faire cela pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on est confronté à une procédure infinie, sans savoir si elle est justifiée. Par bonheur, le théorème de récurrence va nous permettre vérifier que l'on construit bien ainsi une suite (et une seule, une fois le premier terme choisi).

Proposition 3.2. *Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dont le domaine de définition $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On suppose que l'image par f de $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que*

$$f(\mathcal{D}) \ := \ \big\{ f(x)\,;\ x \in \mathcal{D} \big\} \ \subset \ \mathcal{D}\,.$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $u_0 = d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \ = \ f(u_n)\,. \tag{3.1}$$

Remarque 3.3. *Pour montrer cette proposition 3.2, on se trouve confronté à une difficulté subtile et tenace. On renvoie au paragraphe 9.2.2 pour un éclaircissement à ce sujet.*

HP

Preuve de la proposition 3.2 : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Définition 3.4. *On se place dans le cadre de la proposition 3.2. Pour $d \in \mathcal{D}$, la suite u est appelée suite récurrente associée à f de premier terme d. La proposition* (3.1) *s'appelle la relation de récurrence satisfaite par u.*

On définit maintenant la classe des suites arithmético-géométriques, qui constituent des exemples de suites récurrentes associées à une fonction. Soit $(a; b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $f(x) = a \cdot x + b$. Comme l'image du domaine de f est incluse dans $\mathbb{K}$, le domaine de f, on peut appliquer la proposition 3.2 à cette fonction f. Pour $d \in \mathbb{K}$, il existe donc une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $u_0 = d$ et (3.1). Cette dernière s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \ = \ a \cdot u_n \, + \, b\,. \tag{3.2}$$

Définition 3.5. *Soit $(a; b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $d \in \mathbb{K}$. L'unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ de premier terme $u_0 = d$ vérifiant* (3.2) *est la suite arithmético-géométrique associée à $(a; b)$ et de premier terme d.*
Lorsque $b = 0$, on dit que u est la suite géométrique de raison a et de premier terme d.
Lorsque $a = 1$, on dit que u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme d.

3.2.2 Sommes et séries.

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On souhaite effectuer la somme des termes de la suite u du premier terme au $n$ième, pour un $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, une telle somme est $s_0 = u_0$. Lorsque $n = 1$, une telle somme est $s_1 = u_0 + u_1$. Lorsque $n = 2$, une telle somme est $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$. Pour n arbitraire, on a envie d'écrire

$$s_n \ = \ u_0 \, + \, u_1 \, + \, \cdots \, + \, u_{n-1} \, + \, u_n\,. \tag{3.3}$$

On rencontre de nouveau une procédure essentiellement infinie puisque n n'est pas limité. Grâce au théorème de récurrence, on va pouvoir donner un sens précis à toutes ces sommes.

Proposition 3.6. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty [\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Alors il existe une unique suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $s_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D\,, \quad s_{n+1} \ = \ s_n \, + \, u_{n+1}\,. \tag{3.4}$$

Remarque 3.7. *Ici aussi, on fait face à la difficulté subtile mentionnée dans la remarque 3.3.*

Preuve de la proposition 3.6 : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

HP

Définition 3.8. *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$*,* $D = [\![n_0; +\infty[\![$ *et* $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ *une suite. La suite* s *construite dans la proposition 3.6 est appelée suite des sommes partielles de la suite* u*. On dit aussi que c'est la série de terme général* u_n*. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite* s*, qui sont des sommes finies. Pour* $n \in D$*, on pose :*

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \sum_{k \in [\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \sum_{n_0 \le k \le n} u_k \;:=\; s_n \,. \tag{3.5}$$

Le signe $\sum$ *se dit "somme" ou bien "sigma" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "sigma"). Le paramètre* k *dans ces notations est appelé indice de la somme. Lorsque* $n < n_0$*, on pose par* **convention**

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 0\,.$$

Attention, dans la dernière notation de (3.5), il est sous-entendu que l'indice k de la somme est un entier. On peut changer le symbole désignant l'indice de ces sommes sans changer les sommes en question. Il n'a pas d'existence extérieure, il ne sert qu'à décrire la somme. Il joue un rôle similaire à l'indice utilisé dans une boucle en informatique. En particulier, il ne peut pas apparaître en dehors de la somme.

Alors que les séries seront étudiées de manière systématique en L2, on se limitera, dans ce cours, à quelques exemples. En revanche, on se servira souvent des symboles introduits dans (3.5) qui permettent de décrire des sommes finies.

Lire

Voyons maintenant quelques propriétés de ces sommes. Prenons une suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Considérons le troisième terme s_3 de la suite s des sommes partielles de u. Par définition, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_2 = s_1 + u_2$ et $s_1 = u_1$. Donc $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$. On peut aussi écrire $s_3 = u_3 + u_2 + u_1$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{3-\ell}\,.$$

Si $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $v_p = u_{p+1}$ alors $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ est aussi $v_0 + v_1 + v_2$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} v_\ell \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{\ell+1}\,.$$

On peut aussi écrire $s_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ et $s_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{2} u_k\right) + \left(\sum_{k=3}^{3} u_k\right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{1} u_k\right) + \left(\sum_{k=2}^{3} u_k\right).$$

Soit $(w_1; w_2; w_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $u_1 = 2w_1$, $u_2 = 2w_2$ et $u_3 = 2w_3$. On peut écrire $s_3 = u_1 + (2w_1 + 2w_3) = 2w_1 + 2(w_2 + w_3) = 2(w_1 + (w_2 + w_3)) = 2(w_1 + w_2 + w_3)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{k=1}^{3} 2w_k \;=\; 2 \cdot \sum_{k=1}^{3} w_k\,.$$

Si $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, on peut considérer la somme $(u_1 + x_1) + (u_2 + x_2) + (u_3 + x_3)$ et l'écrire $(u_1 + u_2 + u_3) + (x_1 + x_2 + x_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} (u_k + x_k) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{3} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right).$$

On sent que ces propriétés sont générales, elles ne dépendent pas du nombre de termes dans la somme. On s'attend donc à ce qu'elles soient vraies quelque soit le nombre de termes. Comme ce dernier n'est pas majoré, on va avoir besoin du théorème de récurrence pour les établir dans le cas général. C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $u : \llbracket n_0; +\infty\llbracket \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : \llbracket n_0; +\infty\llbracket \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq n_0$,*

$$\forall q \in \llbracket n_0; n\rrbracket\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0}^{q} u_k + \sum_{k=q+1}^{n} u_k\,, \tag{3.6}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\,, \tag{3.7}$$

$$\forall m \in \llbracket 0; n_0\rrbracket\,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m}\,, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{n-\ell} \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p}\,, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \lambda u_k = \lambda \cdot \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_k + v_k) = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)\,. \tag{3.12}$$

$$\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} = \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k}\,, \tag{3.13}$$

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=n_0}^{n} |u_k|\,. \tag{3.14}$$

Si u est constante égale à $c \in \mathbb{K}$ alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = c \cdot (n - n_0 + 1)\,, \tag{3.15}$$

c'est-à-dire c fois le nombre d'éléments dans $\llbracket n_0; n\rrbracket$.

Preuve :

1. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = ((3.6)$ est vraie$)$. Pour $n = n_0$, on a (3.6) est vraie d'après la convention adoptée dans la définition 3.8. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}\,,$$

ce qui est précisément la formule dans (3.6) pour n remplacé par $n+1$ et $q = n+1$. Maintenant, soit $q \in \llbracket n_0; n\rrbracket$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k\right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k\right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n+1} u_k\right).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.6).

Lire

2. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{Q}(n) = ((3.7)$ est vraie). Pour $n = n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k = u_{n_0} = u_{(n_0+m)-m} = \sum_{\ell=n_0+m}^{n_0+m} u_{\ell-m}$$

donc $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = \left(\sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\right) + u_{(n+1+m)-m} = \sum_{\ell=n_0+m}^{(n+1)+m} u_{\ell-m} .$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.7).
Soit $m \in [\![n_0; n]\!]$. On applique (3.7) avec n_0 remplacé par n_0-m, u remplacée par $w = (u_{\ell+m})_{\ell \in [n_0-m;+\infty[}$, n remplacé par $n-m$:

$$\sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m} = \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} w_\ell = \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} w_{\ell'-m} = \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} u_{(\ell'-m)+m} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k ,$$

ce qui donne (3.8).

3. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{R}(n) = \left(\forall x \in \mathbb{K}^{[n_0;+\infty[} , \sum_{k=n_0}^{n} x_k = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n-\ell}\right) .$$

$\mathcal{R}(n_0)$ est vraie car, pour tout $x \in \mathbb{K}^{[n_0;+\infty[}$ et $n = n_0$, $x_{n_0} = x_{n-0}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $x \in \mathbb{K}^{[n_0;+\infty[}$. Pour $p \geq n_0$, soit $w_p = x_{p+1}$. On a $w \in \mathbb{K}^{[n_0;+\infty[}$. On a, par (3.6) avec n remplacé par $n+1$, u remplacé par x et $q = n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} x_k\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} w_{k-1}\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{k=n_0}^{n} w_k\right) + x_{n_0} ,$$

d'après (3.8) pour u remplacée par w et $m = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à w, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} w_{n-\ell}\right) + x_{n_0} = \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n+1-\ell}\right) + x_{n+1-(n+1-n_0)} = \sum_{\ell=0}^{n+1-n_0} x_{n+1-\ell} .$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.9) puisque $u \in \mathbb{K}^{[n_0;+\infty[}$.

4. Pour $p \in [\![n_0; n]\!]$, soit $y_p = u_{n+n_0-p}$ et, pour $p > n$, $y_p = 0$. On a donc, par (3.9) appliquée à y,

$$\sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} = \sum_{p=n_0}^{n} y_p = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} y_{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{\ell+n_0} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k ,$$

par (3.8) avec $m = n_0$. On a montré (3.10).

5. Pour $n \geq n_0$, soit

Lire

$$\mathcal{S}(n) = \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)\right) .$$

Comme $(\lambda u_{n_0} + v_{n_0}) = \lambda(u_{n_0}) + (v_{n_0})$, $\mathcal{S}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k)\right) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right) + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} v_k\right),\end{aligned}$$

par la définition 3.8. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $v = 0$, on obtient (3.11). D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = 1$, on obtient (3.12).

6. On a, en utilisant $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = i$ et, pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, u_k remplacé par $\Im(u_k)$ et v_k remplacé par $\Re(u_k)$,

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} &= \overline{\sum_{k=n_0}^{n} \big(\Re(u_k) + i \cdot \Im(u_k)\big)} = \overline{\left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) + i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right)} \\ &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) - i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right) = \sum_{k=n_0}^{n} \big(\Re(u_k) - i \cdot \Im(u_k)\big) \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k},\end{aligned}$$

en utilisant encore $\mathcal{S}(n)$ mais avec $\lambda = -i$. On a montré (3.13).

7. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{T}(n) =$ ((3.14) est vraie). $\mathcal{T}(n_0)$ est vraie car

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k\right| = |u_{n_0}| \leq |u_{n_0}| = \sum_{k=n_0}^{n_0} |u_k|.$$

Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8, l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right| = \left|\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| + |u_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|\right) + |u_{n+1}| = \sum_{k=n_0}^{n+1} |u_k|.$$

Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.14).

8. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{U}(n) =$ ((3.15) est vraie). $\mathcal{U}(n_0)$ est vraie car $u_{n_0} = c(n_0 - n_0 + 1)$. Supposons que $\mathcal{U}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = c \cdot (n - n_0 + 1) + c = c \cdot (n + 1 - n_0 + 1).$$

Donc $\mathcal{U}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{U}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.15). $\square$

Lire

3.2.3 Produits, puissances, factorielles.

Dans le paragraphe 3.2.2, on a donné des propriétés sur les sommes finies dans $\mathbb{K}$. De manière similaire, on peut traiter les produits finis dans $\mathbb{K}$. On pourrait obtenir un pendant pour chaque propriété sur les sommes. On se contente ici de donner une notation pour les produits finis, de justifier proprement la suite des puissances d'un nombre et d'introduire la suite des factorielles.

Proposition 3.10. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $\pi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\pi_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D\,, \quad \pi_{n+1} \;=\; \pi_n \,\cdot\, u_{n+1}\,. \tag{3.16}$$

Preuve : Il suffit de remplacer la somme $+$ de $\mathbb{K}$ par le produit $\cdot$ de $\mathbb{K}$ dans la preuve de la proposition 3.6 pour obtenir une preuve de la proposition 3.10. Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Comme au paragraphe 3.2.2, on pourrait donner un nom à cette suite π. On se contente de définir une notation pour les produits finis :

Définition 3.11. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On considère la suite π construite dans la proposition 3.10. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite π, qui sont des produits : pour $n \in D$, on pose :*

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \prod_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \prod_{n_0\leq k\leq n} u_k \;:=\; \pi_n\,. \tag{3.17}$$

Le signe $\prod$ se dit "produit" ou bien "pi" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "pi"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice du produit. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 1\,.$$

Comme au paragraphe 3.2.2, on peut montrer des propriétés de ces produits finis qui sont similaires à celle des sommes finies que l'on a vues dans la proposition 3.9. On se contente de donner la définition des notions de "puissance" et de "factorielle".

Définition 3.12. *Puissances et factorielles.*
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite constante égale à a. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.10 pour cette suite u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a^n := \pi_n$ et on prononce "a puissance n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$a^n \;=\; \prod_{k=1}^{n} a\,.$$

Par **convention**, *on pose $a^0 = 1$.*
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite réelle donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.10 avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! := \pi_n$ et on prononce "factorielle n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

Par **convention**, *on pose $0! = 1$.*

On remarque, par récurrence, que la suite $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et que la suite $(0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang 1. Si $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on vérifie par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{2p} = 1$ et $x_{2p+1} = -1$. On peut aussi montrer par récurrence que la suite réelle $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On donne deux propriétés utiles des suites géométriques.

Proposition 3.13. *Soit* $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. *Pour* $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, $(a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$ *et* $(ab)^m = a^m b^m$. *De plus, si* $a \neq 0$, *alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a^n \neq 0$ *et, si* $a \in \mathbb{R}^{+*}$, *alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in \mathbb{R}^{+*}$.

Lire

Preuve : Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m})$, $\mathcal{Q}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)^m = a^{nm})$ et $\mathcal{R}(m) = ((ab)^m = a^m b^m)$.
Par la première convention dans la définition 3.12, $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{R}(0)$ sont vraies.
Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.12, on a $a^{m+1} = a^m \cdot a$ donc $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = (a^n)\cdot(a^m)\cdot a$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m}\cdot a$. Donc, en utilisant encore la définition 3.12, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m+1}$. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{Q}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.12, $(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)^{m+1} = a^{nm}\cdot a^n$. Donc, par $\mathcal{P}(n)$, $(a^n)^{m+1} = a^{nm+n} = a^{n(m+1)}$. Donc $\mathcal{Q}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{R}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.12, $(ab)^{m+1} = (ab)^m \cdot (ab)$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(ab)^{m+1} = a^m \cdot b^m \cdot a \cdot b = a^{m+1}\cdot b^{m+1}$, par la définition 3.12. Donc $\mathcal{R}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{R}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{S}(n) = (a^n \neq 0)$. Comme $a^0 = 1 \neq 0$, $\mathcal{S}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Si l'on avait $0 = a^{n+1}$ alors on aurait $0 = a \cdot a^n$ donc $a = 0$ ou $a^n = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse sur a et l'hypothèse de récurrence. Donc $a^{n+1} \neq 0$ et $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{T}(n) = (a^n \in \mathbb{R}^{+*})$. Comme $a^0 = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{T}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Donc $a^n \in \mathbb{R}^{+*}$ et, comme $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a^{n+1} = a \cdot a^n \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

En application, on peut montrer le résultat suivant sur les suites arithmético-géométrique.

Proposition 3.14. *Soit* $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. *Soit* $d \in \mathbb{C}$. *Soit* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *la suite arithmético-géométrique de premier terme* d *et associée à* $(a;b)$ *(cf. Definition 3.5). On a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; d\cdot a^n \,+\, b\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,. \tag{3.18}$$

Lorsque $b = 0$, *on a donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d\cdot a^n$.
Lorsque $a = 1$, *on a donc, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.
De plus, si $a \neq 1$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \;=\; \frac{1\,-\,a^n}{1\,-\,a} \;=\; \frac{a^n\,-\,1}{a\,-\,1}\,. \tag{3.19}$$

Preuve : À faire en td. □

3.3 Propriétés des suites.

Dans cette partie, on donne des propriétés générales des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Des propriétés spécifiques aux suites réelles seront aussi mentionnées. On introduit enfin la notion de sous-suite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.3.1 Propriétés générales.

Une première propriété importante des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) réside dans le fait que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des lois de compositions appropriées que l'on donne maintenant.

Définition 3.15. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n + v_n$. La suite w est la somme des suites u et v et est notée $w = u + v$.
On définit une nouvelle suite $x : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $x_n = \lambda \cdot u_n$. La suite x est le produit de la suite u par le scalaire λ et est notée λu ou $\lambda \cdot u$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D$, $u_n = c$.
La suite nulle sur D est la suite constante égale à 0 sur D.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) à partir du rang N s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n = c$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, pour laquelle il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit constante (sur D) à partir du rang N, est dite stationnaire.

Par exemple $2((1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = (2/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La somme des suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, données par $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(1/n)$, est la suite nulle sur $\mathbb{N}^*$ puisque, pour tout $n > 0$,

$$u_n + v_n = \ln(n) + \ln(1/n) = \ln(n) - \ln(n) = 0\,.$$

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^D$, alors qu'elles sont différentes.

Proposition 3.16. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}^D$ des suites définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 3.15, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Lire

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$, on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. On voit que la suite nulle sur D est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. Toute suite $u \in \mathbb{K}^D$ admet comme suite opposée la suite $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $n \in D$, $v_n = -u_n$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)\,,\ (\lambda + \mu)\,a = \lambda a + \mu a\,,\ \lambda\,(a + b) = \lambda a + \lambda b\,,\ 1 \cdot a = a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u; v) \in (\mathbb{K}^D)^2$,

$$(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)\,,\ (\lambda + \mu)\,u = \lambda u + \mu u\,,\ \lambda\,(u + v) = \lambda u + \lambda v\,,\ 1 \cdot u = u\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^D$ muni des lois de la définition 3.15 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour $m \in D$, on considère la suite $e^{(m)} : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $e_n^{(m)} = 1$ si $n = m$ et $e_n^{(m)} = 0$ si $n \neq m$.

Proposition 3.17. *La famille $(e^{(m)})_{m\in D}$ est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^D$. En particulier, la dimension de l'espace est infinie.*

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1; \cdots; i_p) \in D^p$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $(\lambda_1; \cdots; \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} = 0$$

Lire

dans $\mathbb{K}^D$. Donc, pour $j \in [\![1; p]\!]$, on a, en prenant la valeur en i_j de la suite nulle,

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} \right)_{i_j} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)}_{i_j} = \lambda_j .$$

On a montré que la famille est libre. □

Remarque 3.18. *Les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ (vus dans le cours d'Algèbre 2) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^D$ (pour les lois de la définition 3.15).*

IN

On introduit d'autres opérations sur les suites. On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Définition 3.19. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de u par v est la suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n \cdot v_n$. On note w par uv ou $u \cdot v$.
On note par $|u|$ la suite réelle $(|u_n|)_{n \in D}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|u|$ est la suite "module de u" et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|u|$ est la suite "valeur absolue de u".
Les suites réelles $\Re(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in D$, $(\Re(u))_n = \Re(u_n)$ et $(\Im(u))_n = \Im(u_n)$, sont appelées respectivement partie réelle de u et partie imaginaire de u.

Remarque 3.20. *On remarque que, si $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$, cu peut être vu comme le produit de u par le scalaire c ou bien comme le produit de la suite u avec la suite constante égale à c.*
Si $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle alors $\Re(u) = u$ et $\Im(u)$ est la suite nulle.

Lire

3.3.2 Propriétés propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.21. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle.*
On dit que u est croissante si

$$\forall (n; m) \in D^2 , \Big((n \leq m) \implies (u_n \leq u_m) \Big) .$$

On dit que u est strictement croissante si

$$\forall (n; m) \in D^2 , \Big((n < m) \implies (u_n < u_m) \Big) .$$

On dit que u est décroissante si

$$\forall (n; m) \in D^2 , \Big((n \leq m) \implies (u_n \geq u_m) \Big) .$$

On dit que u est strictement décroissante si

$$\forall (n; m) \in D^2 , \Big((n < m) \implies (u_n > u_m) \Big) .$$

On dit que u est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.

Soit $N \in \mathbb{N}$.
On dit que u est croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ est croissante.

On dit que u est strictement croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap \llbracket N; +\infty \llbracket$ est strictement croissante.
On dit que u est décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap \llbracket N; +\infty \llbracket$ est décroissante.
On dit que u est strictement décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap \llbracket N; +\infty \llbracket$ est strictement décroissante.
On dit que u est monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap \llbracket N; +\infty \llbracket$ est monotone.
On dit que u est strictement monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap \llbracket N; +\infty \llbracket$ est strictement monotone.

On dit que u est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit croissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement croissante à partir du rang N.
On dit que u est décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit décroissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement décroissante à partir du rang N.
On dit que u est monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit monotone à partir du rang N.
On dit que u est strictement monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement monotone à partir du rang N.

Voyons quelques exemples. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est aussi strictement croissante. La suite constante égale à 1 est croissante, mais aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et aussi strictement décroissante.

On peut vérifier que la suite $(n^2 - 4n + 4)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 2023. Elle l'est aussi à partir du rang 2. Elle ne l'est pas à partir du rang 1. Cette suite est donc croissante à partir d'un certain rang. En fait, on peut vérifier qu'elle est strictement croissante à partir du rang 2. Elle est donc strictement croissante à partir d'un certain rang.

Contrairement aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose, pour repérer les suites monotones, de la proposition suivante.

Proposition 3.22. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : \llbracket n_0; +\infty \llbracket \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\big(u \text{ est croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \quad u_{n+1} \geq u_n\big).\\
\big(u \text{ est strictement croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \quad u_{n+1} > u_n\big).\\
\big(u \text{ est décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \quad u_{n+1} \leq u_n\big).\\
\big(u \text{ est strictement décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket, \quad u_{n+1} < u_n\big).
\end{aligned}$$

Preuve : Montrons d'abord les quatres implications $\Longrightarrow$.

a). On suppose que u est croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n + 1 \geq n$, on a, d'après la croissance de u, $u_{n+1} \geq u_n$.

b). On suppose que u est strictement croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la stricte croissance de u, $u_{n+1} > u_n$.

Lire

c). On suppose que u est décroissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n + 1 \geq n$, on a, d'après la décroissance de u, $u_{n+1} \leq u_n$.

Lire

d). On suppose que u est strictement décroissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la stricte décroissance de u, $u_{n+1} < u_n$.

Passons maintenant aux implications $\Longleftarrow$.
On suppose vraie la proposition de droite de la première équivalence de l'énoncé. On montre que u est croissante. Pour ce faire, on montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \geq u_p\right).$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, car, pour tout $p \geq n_0$, on a $u_{p+0} = u_p \geq u_p$. Supposons que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq n_0$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $u_{p+q+1} = u_{(p+1)+q} \geq u_{p+1}$. D'après l'hypothèse, $u_{p+1} \geq u_p$. Donc $u_{p+q+1} \geq u_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq n_0$, $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $(m; n) \in [\![n_0; +\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{P}(m-n)$ est vraie, on a $u_m = u_{n+(m-n)} \geq u_n$. On a montré que u est croissante.
Pour la seconde implication $\Longleftarrow$, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} > u_p\right).$$

Pour la troisième, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \leq u_p\right).$$

Pour la dernière, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} < u_p\right).$$

Lire

On a montré les quatres équivalences. □

Définition 3.23. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que u est majorée par a si a majore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \leq a$.
On dit que u est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit majorée par b.
On dit que u est minorée par a si a minore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \geq a$.
On dit que u est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit minorée par b.
On dit que u est bornée si u est majorée et u est minorée.
Lorsqu'une suite est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une suite est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, donc positive. On peut vérifier qu'elle n'est pas majorée. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi minorée par 0. Elle est majorée par 2023. Elle est aussi majorée par 1.

On peut bien sûr définir le fait qu'une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ soit majorée à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit qu'elle est majorée à partir du rang N s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Mais cette propriété n'est pas très utile car, dans ce cas, la suite est majorée, tout court.
Vérifions ce point. Prenons donc une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est majorée à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Il existe donc un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Par la proposition 1.10, l'ensemble $[\![0; N]\!] \cap D$ est fini. Donc son image par u est aussi finie. Par la proposition 1.10, elle admet un maximum m. Soit $b = \max(a; m)$. Soit $n \in D$. Si $n \leq N$, $n \in D \cap [\![0; N]\!]$, donc $u_n \leq m \leq b$. Si $n > N$ alors, par
Lire
l'hypothèse, $u_n \leq a \leq b$. Donc b majore u et u est majorée.
Lorsque la partie D est finie, toute suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée, majorée à partir d'un certain rang par le maximum de l'ensemble fini non vide $\{u_n ; n \in D\}$ (cf. proposition 1.10). De même, lorsque D est finie,

Lire

toute suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée, minorée à partir d'un certain rang par le minimum de l'ensemble fini non vide $\{u_n; n \in D\}$ (cf. proposition 1.10). Les notions précédentes ne sont donc vraiment utiles que lorsque D est infinie.
On a montré la

Proposition 3.24. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite.*

1. *Si D est finie alors u est majorée et minorée.*
2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ soit majorée (resp. minorée) alors u est majorée (resp. minorée).*

Pour terminer, on donne une caractérisation très utile de la bornitude avec la valeur absolue.

Proposition 3.25. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a l'équivalence :*

Voir chap. fonctions

$$\Big((u \text{ est bornée}) \iff (\exists m \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in D\,, \quad |u_n| \leq m)\Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose u bornée. Il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in D$, $m_- \leq u_n \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $n \in D$. On a $u_n \leq m_+ \leq m$ et $-u_n \leq -m_- \leq m$, donc $|u_n| = \max(u_n; -u_n) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D$, $|u_n| \leq m$ soit $u_n \in I(0; m]$. Par la proposition 2.5 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $n \in D$, $-m \leq u_n \leq m$. Donc u est majorée par m et minorée par $-m$. Elle est donc bornée. $\square$

3.3.3 Sous-suites.

On revient dans le cadre général des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 3.26. *On appelle extractrice une suite strictement croissante définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

Remarque 3.27. *Soit D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Il se trouve que φ est injective.*
En effet, si $\varphi(n) = \varphi(p)$ avec $(n; p) \in (D')^2$, alors la proposition $(n > p)$ est fausse car sinon on aurait $\varphi(n) > \varphi(p)$, par la stricte croissante de φ, et il en est de même de la proposition $(n < p)$ pour la même raison, d'où $n = p$.
Par la proposition 9.3, l'image $D := \varphi(D')$ de D' par φ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Les suites $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n + 1$, sont des extractrices. La suite $\varphi_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\varphi_3(n) = n^2 - 4n + 4$ n'est pas une extractrice car $\varphi_3(0) = 4 > 1 = \varphi_3(1)$. Mais on peut vérifier que sa restriction à $[\![2; +\infty[\![$ en est une. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante mais elle n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. Ce n'est donc pas une extractrice. Cependant, si l'on pose $D' = \{p^2; p \in \mathbb{N}\}$, D' est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$ et la suite $\varphi_4 : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D'$, $\varphi_4(n) = \sqrt{n}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est strictement croissante. C'est donc une extractrice. Enfin, on peut vérifier que $\varphi_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_5(n) = 2^n$ est aussi une extractrice.

Définition 3.28. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Une sous-suite de u est la composée de u par une extractrice, c'est-à-dire une suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle qu'il existe une extratrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$.*
Une sous-suite de u est aussi appelée suite extraite de u.

Pour $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de u puisqu'elles sont $u \circ \varphi_1$ et $u \circ \varphi_2$ respectivement, pour les extractrices φ_1 et φ_2 vues plus haut. Si $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (1/(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors y est une sous-suite de x car $y = x \circ \psi$, où $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, définie par $\psi(n) = 2n$, est strictement croissante. Soit $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

Lire

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)} \, .$$

Soit $v = ((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $2(2p+1) \notin 4\mathbb{N}$ car $2p+1 \notin 2\mathbb{N}$, et

$$u_{2(2p+1)} \;=\; \frac{1}{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{\sin\left(p\pi \,+\, \frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{(-1)^p} \;=\; (-1)^p \, .$$

On voit que v est une sous-suite de u car $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$, donnée par $\varphi(p) = 2(2p+1)$, est strictement croissante.

Voyons maintenant une façon plus intuitive de construire des sous-suites d'une suite donnée. Prenons une suite réelle $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, on veut contruire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, mais sans les deux premiers termes de u. On peut prendre $v^{(0)} : [\![3; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ et $v^{(0)}_n = u_n$, pour $n \geq 3$. On peut aussi prendre $v^{(1)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(1)}_n = u_{n+3}$. Peut-on construire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, sans une infinité des termes de u ? Oui, on peut par exemple retirer tous les termes d'incide pair. On peut prendre $v^{(2)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v^{(2)}_n = u_{2n+1}$. A-t-on, dans tous les cas, construit une sous-suite de u au sens de la définition 3.28 ? Oui, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 3.29. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Soit D_0 une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui est incluse dans D.*
Pour toute partie infinie D' de $\mathbb{N}$, il existe une sous-suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ de u telle que l'ensemble des termes de v sont, dans le même ordre, ceux de la restriction de u à D_0, c'est-à-dire telle que

$$v(D') \;:=\; \{v_p\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in D_0\} \;=:\; u(D_0)$$

et telle qu'on ait

$$\Big(\forall\,(p;q) \in (D')^2\,, \quad (p \leq q) \implies \big(\exists\,(n;m) \in D_0^2\,; \quad (n \,\leq\, m) \text{ et } (u_n \,=\, v_p) \text{ et } (u_m \,=\, v_q)\big)\Big)\,. \tag{3.20}$$

HP

Encore une fois, nous sommes confrontés à la difficulté signalée dans la remarque 3.3. Pour démontrer cette proposition, on va utiliser un résultat préliminaire et des propriétés des bijections rappelées dans le paragraphe 1.1 (voir aussi le paragraphe 9.1.1).

Lemme 3.30. *Soit D et D' deux parties infinies de $\mathbb{N}$. Il existe une bijection strictement croissante φ : $D' \longrightarrow D$.*

Preuve : Voir celle de la proposition 9.5. □

Preuve de la proposition 3.29. : On applique le lemme 3.30 avec $(D; D')$ remplacé par $(D_0; D')$. Il existe donc une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D_0$. On pose $v = u \circ \varphi$. La suite v est bien définie car l'image $\varphi(D')$ de D' par φ est incluse dans D, le domaine de définition de u. Comme φ est une extractrice, v est une sous-suite de u, par la définition 3.28. De plus, comme φ est une bijection de D' sur D_0,

$$v(D') \;=\; \{v_p\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_{\varphi(p)}\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in \varphi(D')\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in D_0\} \;=\; u(D_0)\,.$$

Soit maintenant $(p;q) \in (D')^2$ avec $p \leq q$. Soit $n = \varphi(p)$ et $m = \varphi(q)$. Comme φ est strictement croissante, elle est croissante donc $n \leq m$. De plus, par définition de v, on a $u_n = u_{\varphi(p)} = v_p$ et $u_m = u_{\varphi(q)} = v_q$. On a donc montré (3.20). □