Notations de Landau

Déf: on note $\underset{0}{o}(\|\overrightarrow{MM_0}\|)$ une fct f déf au voisinage de M_0 tq $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M)}{\|\overrightarrow{MM_0}\|}$ existe et vaut 0.

$$\left(\exists c > 0 ; \ |f(M)| \leqslant c \|\overrightarrow{MM_0}\| \right)$$
près de M_0

Plus généralement : $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

g ne s'annule pas au voisinage de M_0 (sauf peut-être en M_0)

$$f \underset{M_0}{=} o(g) \text{ si } \lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = 0$$

Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$M \mapsto (f_1(M), f_2(M))$

alors $F = o(g)$ si $\|F\| = o(g)$

$$\left(\begin{array}{l} \|F\| : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \\ M \mapsto \sqrt{f_1(M)^2 + f_2(M)^2} \end{array} \right)$$

Exemples : $g(M) = \|\overrightarrow{M_0M}\| \ (\underset{M \to M_0}{\longrightarrow} 0)$

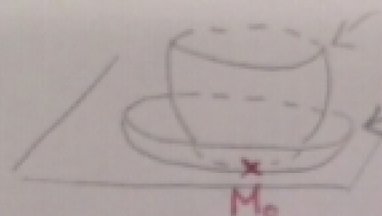
$H(M) = \overrightarrow{M_0M}$

$f(M) = g(M)^2$

On a $f(M) \underset{M_0}{=} o(g)$ $\quad H \neq o(g)$ (admis) $\quad gH \underset{M_0}{=} o(g)$

<u>Interprétation</u> g s'annule en M_0 et $f \underset{M_0}{=} o(g)$.

Alors f s'annule en M_0 et est "plus petite" que g près de M_0.



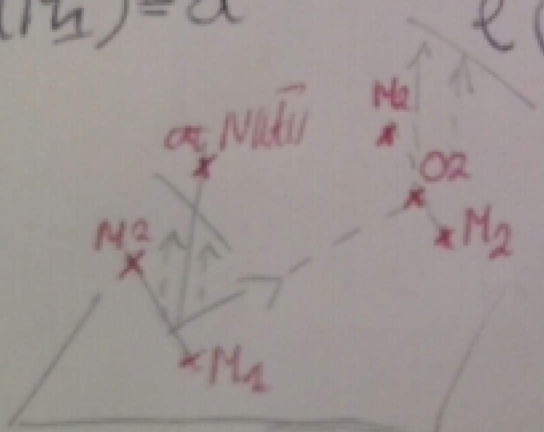
Applicat° affines : $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déf par $\ell(M) = a + \underbrace{\vec{t}}_{\text{vect de } \mathbb{R}^2} \cdot \overrightarrow{OM}$

$$\left(\ell(x,y) = a + t_1 x + t_2 y \right)$$
où $\vec{t} = \binom{t_1}{t_2}$

$\lambda \vec{t}$ $\lambda > 0$

$\ell(M_1) = a$

$$\ell(M_2) = a + \vec{t} \cdot (\overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2M_2})$$
$$= a + \lambda \|\vec{t}\|^2 + 0$$

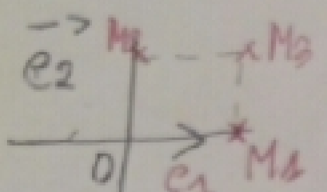


Le graphe est un plan

$N \in \mathbb{R}$ $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ déf par $L(M) = N + \mathcal{L}(\overrightarrow{OM})$

applic linéaire sur $\mathbb{R}^2$ (matrice 2x2)

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

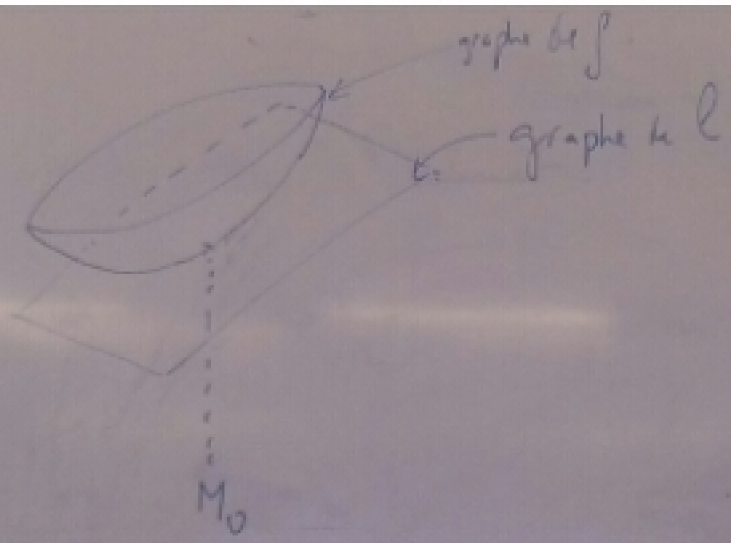


$\leadsto$ l'applicat° déplace tous les pts. sur un autre axe

Pertubation :

$\ell : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ déf. par

$$\ell(M) = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\vec{t}}_{\text{vect. de } \mathbb{R}^2} \cdot \overrightarrow{OM}$$



$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$f - \ell \underset{M_0}{=} o\left(\|\overrightarrow{M_0M}\|\right).$$

Ça se traduit par :

Différentiabilité

Fonctions partielles

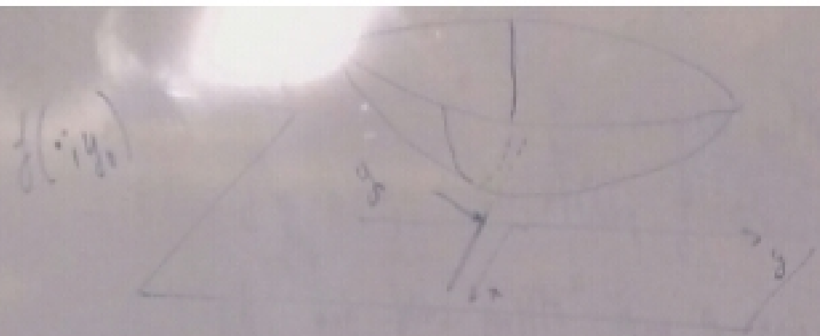
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x_0 \in \mathbb{R}$
$y_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0; \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto f(x_0; y).$$

$$f(\cdot, y_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x; y_0)$$

Ce sont les appl. partielles de f



$(x_0;y)$.

$\mathbb{R}$

$f(x;y_0)$

f

<u>Prop.</u> : Si f est conti alors pour tout $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $f(\cdot, y_0)$ et $f(x_0;\cdot)$ sont conti.

Attention : la réciproque est fausse.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x;y) &\longmapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x;y)\neq(0;0) \\ &\quad\ 0 \quad \text{si } (x,y)=(0,0) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0;\cdot) \quad y \mapsto 0 \\ f(\cdot;0) \quad x \mapsto 0 \\ x_0 \neq 0 \quad f(x_0,\cdot) : y \mapsto \dfrac{x_0 y}{x_0^2+y^2} \\ y_0 \neq 0 \quad f(\cdot, y_0) : x \mapsto \dfrac{x y_0}{x^2+y_0^2} \end{array}\right\} \text{conti}$$

Mais f n'est pas conti. en $(0;0)$

Soit $h : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t\end{array}$. h est conti. en 0.

Si f était conti en $(0;0)$ alors

$\varphi : t \longmapsto f(h(t), h(t))$

le serait aussi (résultat précédent)

$$\left.\begin{array}{l} t\neq 0 \quad \varphi(t) = \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2} \\ t=0, \quad \varphi(0) = 0 \end{array}\right| \ \varphi \text{ n'est pas conti. en } 0.$$

<u>Contr.</u>

Déf. : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f(\cdot ; y_0)$ admet une dérivée en x_0

alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la $1^{ère}$ var. en M_0 ("par rapport à x")

donnée par : $D_1 f(M_0) = \big(f(\cdot ; y_0)\big)'(x_0)$

(not. abusive $D_1 f(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$)

$$\begin{pmatrix} D_1 f(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x ; y) \end{pmatrix}$$

Si $f(x_0, \cdot)$ admet une dérivée en y_0

alors on dit que f admet une dérivée partielle par rapp. à la 2^e var. en M_0.

donnée par

$$D_2 f(M_0) := \big(f(x_0 ; \cdot)\big)'(y_0)$$

$$\left(\text{"}\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\text{"}\right)$$

Ex : $f(x;y) = x^2y + x^3y^4 - 3y$.

les appl. partielles sont dérivables.

$$D_1 f(x_0;y_0) = \left(2x\,y_0 + 3x^2y_0^4 - 0\right)_{|x=x_0}$$

$$= 2x_0y_0 + 3x_0^2y_0^4.$$

$$D_2 f(x_0;y_0) = \left(x_0^2 + 4x_0^3y^3 - 3\right)_{|y=y_0}$$

$$= x_0^2 + 4x_0^3y_0^3 - 3.$$

Rq : $f:$

on supp.

Alors

$f(x, y_0) =$

Rq : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $M_0 = (x_0;y_0)$.

on supp. $D_1 f(M_0)$ existe.

Alors

$$f(x, y_0) = f(x_0;y_0) + \underbrace{\left(f(\cdot;y_0)\right)'_{(x_0)}}_{\substack{D_1 f(M_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)}}(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$f(x_0+h;y_0) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + o(h).$$

Si

$f($

Fonc

Si $D_2 f(M_0)$ existe, on a aussi

$$f(x_0; y_0+h) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot h + o(h)$$

Fonctions C^1 :

Déf. : Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : A \to \mathbb{R}$.
On dit que f est C^1
si f admet des dérivées partielles partout qui sont conti des deux variables

Th : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ C^1.
Alors, en tout $M_0 = (x_0, y_0) \in A$, f admet un DL_1 de la forme

$$f(x_0+h ; y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$(*) \qquad + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0) + \underset{(x_0;y_0)}{o}(\|(h;k)\|)$$

Rq : $l : (h;k) \longmapsto f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ est affine.

variables

$\underline{Df(M_0)}(h,k) = \ell(h,k) - f(x_0;y_0)$

est linéaire

c'est la différentielle de f en M_0.

Preuve : admise.

Rq : Lorsque le DL (*) est valable, on dit que f est différentiable en M_0.

Prop. ...

Conti. (en les

Preuve : Par (*)

$\|f(x_0+h;y_0+k) -$

$\le |h\frac{\partial f}{\partial x}(M$

p_1 et p_2 s

Donc $\| \ \| \to 0$ (Gendarmes) donc

Prop. : Si f est C^1 alors f est conti. (en les 2 var.)

Preuve : Par (*) en prenant $\|(h;k)\| \to 0$

$$\|f(x_0+h;y_0+k) - f(x_0,y_0)\|$$

$$\le \underbrace{\left|h\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\right|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\|(h,k)\|}_{\downarrow \, 0}\,\underbrace{\varepsilon(h;k)}_{\downarrow \, 0}.$$

p_1 et p_2 sont conti. donc $\lim_{0} p_1 = 0 = \lim_{0} p_2$.

Donc $\| \ \| \to 0$ (Gendarmes)

Donc $\lim_{M_0} f = f(M_0)$.

Prop. : Soit ...

C^1. Soit λ ...

Alors $\lambda f + \mu g$ ...

Lemme : ...

$p_1(x;y) =$

Les dérivées part...

$\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,y$ ...

$\frac{\partial p_2}{\partial x}(x,y$ ...

Prop. : Soit $f, g : A^{\text{ouv}} \to \mathbb{R}$ C^1. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont C^1.

Preuve : admise.

Prop. : p_1, p_2 sont C^1.

Preuve : $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$

Les dérivées partielles existent et

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(x,y) = 1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y}(x,y) = 1$$

Les dérivées partielles sont const

Les dérivées partielles sont constantes donc conti.

Application : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto x^2y + 3xy - y^3$

Les appl. partielles sont des polynômes donc sont dérivables.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3y - 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3x - 3y^2.$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 2\, P_1(x;y) P_2(x;y)$
$+ 3 P_2(x;y)$.

P_1, P_2 sont cont. donc, par un résultat du cours, $P_1 P_2$ l'est aussi et $2 P_1 P_2$.

$3 P_2$ l'est aussi et, par somme, $\frac{\partial f}{\partial x}$ l'est aussi.

<u>Ou bien</u> : on peut aussi uti. (*) et (**).

$$f(x,y) = P_1^2 P_2 + 3 P_1 P_2 + P_2^3.$$

<u>Th</u> : Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1.

Soit $\varphi_1 ; \varphi_2 : I \xrightarrow{\text{int.}} \mathbb{R}$ dérivables

t.q. $\forall t \in I$, $(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in A$.

Alors $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

est dérivable sur I et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t); \varphi_2(t)) \times \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t); \varphi_2(t)) \times \varphi_2'(t)$$

<u>Preuve</u> :

$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0)$

$+$

Preuve : Par hyp ... $\varepsilon_1(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + (t-t_0)\varphi_1'(t_0) + (t-t_0)\,\varepsilon_1(t-t_0)$$

Par hyp

$$\rho(t) := \|(\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0);\ \varphi_2(t)-\varphi_2(t_0))\|$$

$$\begin{aligned}
f(\varphi_1(t);\varphi_2(t)) &= f(\varphi_1(t_0);\varphi_2(t_0)) \\
&+ (\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0))\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) \\
&+ (\varphi_2(t)-\varphi_2(t_0))\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t_0);\varphi_2(t_0)) \\
&+ \underbrace{\|(\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0),\ \varphi_2(t)-\varphi_2(t_0))\|}_{\rho(t)} \times \varepsilon(\rho(t))
\end{aligned}$$

$$\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

$$\begin{aligned}
g(t) - g(t_0) &= (\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0))\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) \\
&+ (\varphi_2(t)-\varphi_2(t_0))\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) \\
&+ \rho(t)\,\varepsilon(\rho(t)) \\
&= (t-t_0)\Big[\varphi_1'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t_0);\varphi_2(t_0)) \\
&\qquad + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0))\,\varepsilon_1(t-t_0)} \\
&\qquad \varphi_2'(t_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) \\
&\qquad + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0))\,\varepsilon_2(t-t_0)}\Big] \\
&+ \rho(t)\,\varepsilon(\rho(t))
\end{aligned}$$

$\xrightarrow[t\to t_0]{} 0$

$\xrightarrow[t\to t_0]{}$

$$g(t)-g(t_0)=\left[\varphi_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0)) + \varphi_2'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi_1(t_0),\varphi_2(t_0))\right](t-t_0)$$

$$+\ o(t-t_0)$$

$$+\ \rho(t)\,\varepsilon(\rho(t)).$$

$$\rho(t)=\sqrt{(\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0))^2+(\varphi_2(t)-\varphi_2(t_0))^2}$$

$$=|t-t_0|\sqrt{(\varphi_1'(t_0)+\varepsilon_1(t-t_0))^2+(\varphi_2'(t_0)+\varepsilon_2(t-t_0))^2}$$

$\rho(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}0$ donc $\varepsilon(\rho(t))\xrightarrow[t\to t_0]{}0$.

$$g(t)=g(t_0)+L(t-t_0)+o(t-t_0)$$

Donc g est dérivable en t_0 et $g'(t_0)=L$.

Extrema : Déf : $A\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$.
$f: A\to\mathbb{R}$. $M\in A$.

f admet un max local en M s'il existe $r>0$;

$$\forall N\in B(M;r[,\ f(N)\leq f(M)$$

f admet un extrémum local en M si elle y admet un max. local (global) ou un min. local (global).

f admet un max (global) en M si
$\forall N\in A$; $f(N)\leq f(M)$

Th : Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f: A\to\mathbb{R}$ C^1.
Soit $M\in A$. Si f admet un extremum (local) en M alors

$$Df(M)=0$$

$$\left(\begin{aligned} Df(M):\ &\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}\\ &(h,k)\longmapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(M)+k\frac{\partial f}{\partial y}(M)\end{aligned}\right)$$

Rq : $Df(M)=$ ...

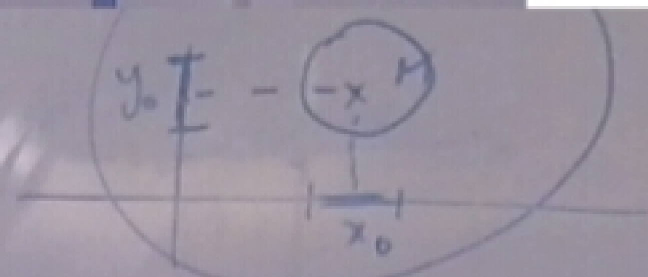
$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(\ldots\\ \text{et}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\ldots\end{array}\right.$

Dans le cas, M est ...

Rq : $Df(M)=0$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)=0 \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)=0 \end{cases}$$

Dans le cas, M est un pt. critique de f



Preuve : Il existe $r>0$ t.q.

$$B(M,r[\subset A.$$

t.q. $f_{|B(M,r[}$ est max. en M.

$M=(x_0;y_0)$.

$f(\cdot;y_0)$ est définie près de x_0

et max. en x_0.

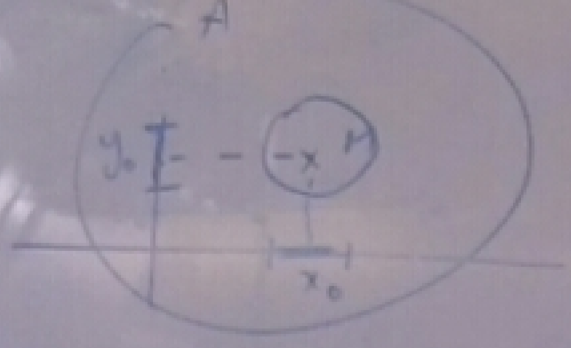
Par le L2, comme $f(\cdot;y_0)$ est dérivable en x_0, on a $(f(\cdot;y_0))'(x_0)=0$

c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$.

$f(x_0,\cdot)$ es

max.

on a, par



$f(x_0,\cdot)$ est définie près de y_0 et max. en y_0. Comme elle est dérivable, on a, par le $L_{1,2}$, $\left(f(x_0,\cdot)\right)'(y_0)=0$.

D'où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Par la remarque, $Df(M)=0$.

Dérivées secondes

Déf. : Soit A ouv. et $f : A \to \mathbb{R}$ C^1. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} : A \to \mathbb{R}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} : A \to \mathbb{R}$ sont aussi C^1, on dit que f est de classe C^2.

notations : f C^2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x;y) =: \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x;y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) =$

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x;y) =$

Th. (Schwartz)

Si f est C

$\forall M \in A$,

Admis.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x;y) =: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

Th. (Schwartz)

Si f est C^2 sur A alors

$$\forall M \in A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M).$$

Admis.

Rq. : → pour les fonct. d'une var.
l'étude de la dérivée seconde
près d'un pt. critique est utile
pour savoir si l'on a un extremum.

→ ici aussi. Les prop. de matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) \end{pmatrix}$$

en un pt. critique M sont utile
pour repérer les extrema.

Déf : Soit $f : \overset{\text{ouv}}{A} \to \mathbb{R}$ C^2.

Le Laplacien de f noté Δf est l'appl. $\Delta f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)$$

Fonct. de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Déf : Soit U ouv de $\mathbb{R}^2$.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Les appl. coordonnées associées à f sont $f_1, f_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$

t.q. $\forall M \in U$, $f(M) = (f_1(M), f_2(M))$

f est conti. si f_1 et f_2 le sont.

f est C^1 si f_1 et f_2 le sont.

Rq : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ C^1.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$M_0 = (x_0, y_0)$.

$$f_1(x_0+h\,;y_0+k) = f_1(x_0,y_0) + h\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) + o(\|(h,k)\|).$$

$$f_2(x_0+h\,;y_0+k) = f_2(--) + h\frac{\partial f_2}{\partial x}(--) + k\frac{\partial f_2}{\partial y}(--) + o(\|--\|).$$

Donc

$$f(x_0+h\,;y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(M_0) \end{pmatrix}}_{(*)} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\|(h;k)\|).$$

Déf :

La matrice

matrice jacob

Prop : Si f est

$f(M) = f(M_0$

Déf. : Soit $f : \overset{\text{ouv.}}{U} \to \mathbb{R}^2$ C^1.

La matrice $(*)$ est la matrice jacobienne de f en M_0 : $Jf(M_0)$

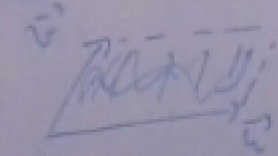
Prop. : Si f est C^1, et $M_0 \in U$

$$f(M) = f(M_0) + Jf(M_0)\cdot(\overrightarrow{M_0M}) + o(\|\overrightarrow{M_0M}\|).$$

Jacobien :

Rappel : $\vec{u}, \vec{v}$ vect. de coord. resp. (x_u, y_u), (x_v, y_v) ds $(\vec{i}, \vec{j})$.

La val. abs. du dét. $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ est l'aire du parall. eng. par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une appl de matrice M

$$\left(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. $f(\vec{u}), f(\vec{v}) \in \mathbb{R}^2$

$$\left| \det\left(f(\vec{u}), f(\vec{v})\right) \right|$$

dét.

val. abs

$$= \left| \begin{vmatrix} M\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} & M\begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} \end{vmatrix} \right| = |\det M| \left| \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right|$$

ce qui est important pour les aires est la valeur absolue du dét.

Déf. : Le déterminant de la matrice jacobienne de f est appelé le jacobien de f.

$\det(Jf(M))$: jacobien de f en M.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$
$t \longmapsto e^t$

$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$
$t \longmapsto \frac{1}{e^t} = e^{-t}$

$f^{<-1>} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$
$s \longmapsto \ln s$

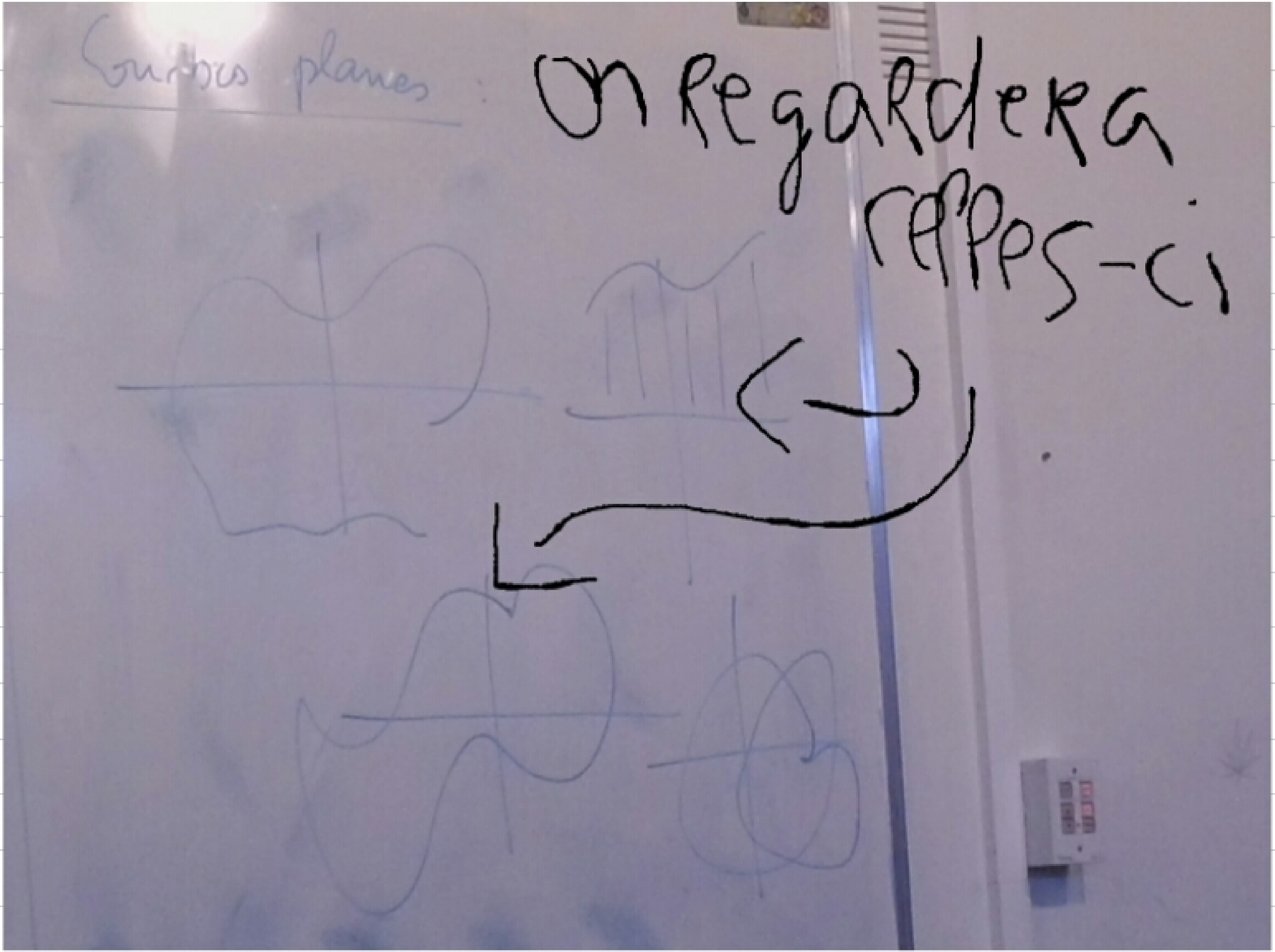
Difféomorphismes :

Déf. : Soit U, V deux ouv. de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f : U \longrightarrow V$.
On dit que f est un (C^1) difféomorphisme si 1) $f : U \to V$ est bij.
2) f et $f^{<-1>}$ sont C^1. ($f^{<-1>}$: bij. réci. de f).

Th. (admis).
$f : U \longrightarrow V$ C^1 et bij. telle
ouv.

$\forall M \in U, \quad Jf(M) \neq 0$.

Alors $f^{<-1>}$ est C^1 (et f est un difféo.).


Courbes planes
On regardera
reppes-ci