3.4 Limite d'une suite.

On introduit ici une notion de limite pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il s'agit, pour une suite $u = (u_n)_{n\in D}$ de donner un sens précis au fait éventuel que les termes de la suite s'approchent d'une limite lorsque n devient grand.
On donne tout d'abord une définition générale de la limite d'une suite. Ensuite, on se penche plus en détails sur le cas des limites finies pour les suites réelles et complexes puis sur celui de limite infinie pour les suites réelles seulement. Pour ces deux types de limites, on donne diverses propriétés.

3.4.1 Définition générale de limite d'une suite.

Commençons par introduire une définition générale. Pour les suites complexes, on n'envisagera que des limites finies (i.e. dans $\mathbb{C}$). Pour les suites réelles, on considèrera des limites finies (i.e. dans $\mathbb{R}$) mais aussi des limites infinies. Pour motiver ces dernières, considérons la suite $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. On voit que les termes deviennent de plus en plus grand et positif, quand n augmente. On a donc envie de dire que cette suite tend vers $+\infty$.

On définit ici la propriété intuitive que les termes de la suite u tendent vers une certaine limite ℓ lorsque n devient grand (lorsque "n tend vers l'infini"). De manière naturelle, on voudrait que cette définition soit telle que, si u a une limite, elle n'en a qu'une. D'autre part, il est raisonable d'imaginer des suites dont le comportement est "chaotique" et semble incompatible avec la notion intuitive de convergence vers une limite. On voudrait donc que la propriété d'avoir une limite ne soit pas commune à toutes les suites.

Pour établir cette définition, on va exploiter la notion de voisinage. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de voisinages complexes d'un point. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on utilise les voisinages réels d'un point ainsi que les voisinages réels de $+\infty$ et $-\infty$. À ce sujet, les propositions 2.14 et 2.15 seront importantes.

Définition 3.31. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de u si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.21}$$

On rappelle que $\mathcal{V}_\ell$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, ces voisinages sont définis dans la définition 2.3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, ils sont définis dans la définition 2.7. Enfin, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, ils sont définis dans la définition 2.10.

On remarque que la proposition

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)$$

signifie que V contient tous les termes de la suite u à partir du rang N. La proposition (3.21) signifie donc que tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang.

Dans ce cadre général (et un peu abstrait), on est en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.32. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$.*
Si (3.21) est vraie et si (3.21), avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.
Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui coïncide avec D sauf pour un nombre fini de termes, c'est-à-dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$.
Si $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ est une suite, qui coïncide avec u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle qu'il existe $N \in [\![p; +\infty[\![$ tel que

$$\forall n \in D \cap D'\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n = v_n)\big)\,, \tag{3.22}$$

alors on a l'équivalence :

$$\big(\ell \text{ est limite de } u\big) \iff \big(\ell \text{ est limite de } v\big)\,. \tag{3.23}$$

Preuve :

a). On montre la première propriété par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la proposition 2.15, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de u, il existe, d'après (3.21), un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Comme ℓ' est limite de u, il existe, d'après (3.21), un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que B contienne tous les termes de u à partir du rang N_2. Comme D est infinie, il existe $n \in D$ tel que $n \geq \max(N_1; N_2)$ (cf. proposition 1.10). Comme $n \geq N_1$, $u_n \in A$. Comme $n \geq N_2$, $u_n \in B$. D'où $u_n \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. Donc $\ell = \ell'$.

b). Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$ et $N \in [\![p; +\infty[\![$ tel que (3.22) soit vraie. On montre l'équivalence (3.23).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u$ existe et vaut ℓ. On montre (3.21) avec u remplacée par v. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse (cf. (3.21) pour u), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Soit $N_2 = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D'$ avec $n \geq N_2$, on a $n \geq N \geq p$ donc $n \in D' \cap [\![p; +\infty[\![$. Par hypothèse, $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$ donc $n \in D$. En utilisant d'abord le fait que $n \geq N$ puis le fait que $n \geq N_1$, on obtient $v_n = u_n \in V$. On a montré que $\ell = \lim v$.
$\Longleftarrow$) : Il suffit de reprendre l'argument précédent en échangeant les rôles de u et v. □

La deuxième propriété montre ce que l'intuition suggérait : comme on s'intéresse à une propriété pour "n grand", rien n'est changé si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite considérée. On peut aussi dire que l'on ne change pas la nature d'une suite en changeant un nombre fini de ses termes.
Quant à la première propriété, elle permet de parler de "la" limite d'une suite, lorsqu'elle existe.

Définition 3.33. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
S'il existe ℓ tel que (3.21) *est vraie, on dit que ℓ est la limite de u ou que u tend vers ℓ et on note*

$$\ell \;=\; \lim u \quad \textit{ou} \quad \ell \;=\; \lim_n u_n \quad \textit{ou} \quad \ell \;=\; \lim_{n \to +\infty} u_n\,.$$

On dit que u est convergente, si elle admet une limite dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on dit aussi que u converge vers ℓ et que u est convergente vers ℓ.
Lorsque u n'admet pas de limite dans $\mathbb{K}$, on dit que u est divergente.

Attention : Il est important d'insister sur le fait qu'une suite peut ne pas avoir de limite. La proposition (3.21) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. C'est le cas, comme on le vérifie ci-dessous, de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une suite qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. Lorsqu'on demande d'étudier la nature d'une suite ou l'éventuelle convergence d'une suite, on demande de répondre à la question : "La suite en question admet-elle une limite ?". Par abus, on dira souvent "Étudier la convergence de la suite ... " ou "Étudier la limite de la suite" (C'est un abus lorsque la suite n'a pas de limite puisque, dans ce cas, cela n'a pas de sens de parler de la limite de la suite dans la consigne). Cela signifie en fait de déterminer si la suite en question a une limite et, éventuellement, de la calculer.

On verra plus loin plusieurs exemples de suites ayant une limite. Donnons ici un contre-exemple.
Soit $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée comme suite réelle. Son comportement oscillant laisse penser qu'elle n'a pas de limite. Elle semble ne pas se concentrer près d'une valeur, ni devenir "très positive", ni devenir "très négative". Montrons par l'absurde qu'elle n'a pas de limite.
Supposons que la limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ de x existe. Considérons la disjonction suivante de cas.
<u>Cas où $\ell \neq 1$</u> : Par la proposition 2.14, il existe un voisinage réel A de ℓ et un voisinage réel B de 1 tel que

$A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N$, $x_n = 1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
Cas où $\ell = 1$: Par la proposition 2.14, il existe un voisinage A de 1 et un voisinage B de -1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N + 1$, $x_n = -1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N + 1 \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
On a montré la

Proposition 3.34. *La suite* $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

HP

Il se trouve que l'on peut reformuler (3.21) en utilisant les voisinages dans D de $+\infty$ (cf. défintion 2.12). Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On rappelle que, pour toute partie A de D, l'image de A par u est l'ensemble $u(A) := \{u_n; n \in A\}$, et que, pour toute partie B de $\mathbb{K}$, l'image réciproque de B par u est l'ensemble $u^{-1}(B) := \{n \in D; u_n \in B\}$.

Proposition 3.35. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (3.21) *est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists W \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big) \tag{3.24}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad u^{-1}(V) \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,. \tag{3.25}$$

Preuve : On montre successivement les implications (3.21) $\implies$ (3.24) $\implies$ (3.25) $\implies$ (3.21).
(3.21) $\implies$ (3.24) : On suppose (3.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

Soit $W := D \cap [\![N; +\infty[\![$. C'est un voisinage de $+\infty$ dans D. De plus, pour $n \in W$, on a $n \geq N$ donc, par la propriété précédente, $u_n \in V$. On a montré (3.24).
(3.24) $\implies$ (3.25) : On suppose (3.24) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de $+\infty$ dans D tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

On montre que $W \subset u^{-1}(V)$. Soit $n \in W$. Par la propriété précédente, $u_n \in V$ donc, par définition de $u^{-1}(V)$, $n \in u^{-1}(V)$. On a donc bien $W \subset u^{-1}(V)$. Comme W est un voisinage de $+\infty$ dans D, $u^{-1}(V)$ en est aussi un (cf. proposition 2.14 et remarque 2.16). On a montré (3.25).
(3.25) $\implies$ (3.21) : On suppose (3.25) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $u^{-1}(V)$ est un voisinage de $+\infty$ dans D. Par définition, il existe un voisinage B de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u^{-1}(V) = B \cap D$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a; +\infty[\![\subset B$. Soit $N = a + 1$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $n \in B$ donc $n \in u^{-1}(V)$ c'est-à-dire $u_n \in V$. On a montré (3.21). □

3.4.2 Limite finie.

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. On se concentre, dans ce paragraphe, sur les limites finies (i.e. celles appartenant à $\mathbb{K}$). On traite en parallèle les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Rappelons la définition 3.31 dans ce cas :

Définition 3.36. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.26}$$

Il est commode d'introduire la reformulation suivante de la proposition (3.26).

Proposition 3.37. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (3.26) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{3.27}$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$ et $n \in D$, la proposition $(|u_n - \ell| < \epsilon)$ est équivalente à $(u_n \in D(\ell;\epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et à $(u_n \in I(\ell;\epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Traitons d'abord le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(3.26) $\implies$ (3.27) : on suppose que (3.26) est vraie. Soit $\epsilon > 0$. On applique (3.26) au voisinage $V = D(\ell;\epsilon[$ de ℓ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que ce V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \in D(\ell;\epsilon[$ donc $|u_n - \ell| < \epsilon$. On a montré (3.27).
(3.27) $\implies$ (3.26) : on suppose (3.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$. On applique (3.27) à cet ϵ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$, c'est-à-dire $u_n \in D(\ell;\epsilon[$. Comme $D(\ell;\epsilon[\subset V$, on a donc, pour $n \in D$ et $n \geq N$, $u_n \in V$. On a montré (3.26).
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant chaque disque $D(\ell;\epsilon[$ par l'intervalle centré $I(\ell;\epsilon[$. □

Voyons maintenant quelques exemples, en commençant par deux importants.

Proposition 3.38. *Soit $c \in \mathbb{K}$, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ la suite constante égale à c. Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1/n$. Les limites $\lim u$ et $\lim v$ existent et valent c et 0, respectivement.*

Preuve : On montre que $\lim u$ existe et vaut c en utilisant (3.27) avec $\ell = c$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $N = 2023$. Pour $n \in D$ et $n \geq N$, on a $|u_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$.
On a bien montré (3.27) avec $\ell = c$.
On montre que $\lim v$ existe et vaut 0 en utilisant (3.27) avec $\ell = 0$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (1/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (1/\epsilon) + 1$ donc $N > 1/\epsilon$. Donc $\epsilon > 1/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $0 < 1/n \leq 1/N < \epsilon$ donc $|1/n| < \epsilon$. On a montré que $\lim u$ existe et vaut 0. □

Dans le premier cas, on devine que la limite sera c. On remarque que, dans la première preuve, on aurait pu prendre $N = 1$ ou même $N = 0$.
Dans le second cas, en considérant les premiers termes de la suite v, on sent que la limite sera 0. Dans la seconde preuve, on aurait pu choisir $N = E(1/\epsilon) + 1$, où E est la fonction partie entière (cf. proposition 9.8).

Voyons d'autres exemples. Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $v_n = 2i/n$. Là aussi, on devine que 0 est limite de v. On remarque que, pour tout $n > 0$, $|v_n| = 2/n$.
Fait au 07-02-2
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (2/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (2/\epsilon) + 1$ donc $N > 2/\epsilon$. Donc $\epsilon > 2/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $|v_n - 0| = |v_n| = 2/n \leq 2/N < \epsilon$. Donc $\lim v = 0$.
Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$w_n \;=\; \frac{3}{1 + \frac{1}{n}}\,.$$

On devine que w tend vers 3. Montrons-le.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$|w_n - 3| \;=\; 3 \cdot \left| \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1 \right| \;=\; 3 \cdot \left| \frac{1 - (1 + \frac{1}{n})}{1 + \frac{1}{n}} \right| \;=\; 3 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \;=\; \frac{3}{n+1}\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (3/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (3/\epsilon) + 1$ donc $N > 3/\epsilon$. Donc $\epsilon > 3/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a, grâce au calcul précédent, $|w_n - 3| = 3/(n+1) \leq 3/N < \epsilon$. Donc $\lim w = 3$.

3.4.3 Notions de limite infinie propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux limites infinies de suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On réécrit la définition 3.31 dans ce cadre.

Définition 3.39. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage réel de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.28}$$

Attention : D'après la définition 3.33, on dit qu'une suite réelle, qui a une limite, converge uniquement si cette limite est un réel. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ diverge donc. Une suite réelle qui tend vers $-\infty$ diverge aussi.

Comme pour les limites finies, on dispose d'une autre formulation de la définition d'une limite infinie.

Proposition 3.40. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Lorsque $\ell = +\infty$, la proposition (3.28) est équivalente à

$$\forall L > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n > L)\big)\,. \tag{3.29}$$

Lorsque $\ell = -\infty$, la proposition (3.28) est équivalente à

$$\forall L > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n < -L)\big)\,. \tag{3.30}$$

Preuve : On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
(3.28) $\implies$ (3.29) : On suppose (3.28) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.28) au voisinage $V =]L; +\infty[$ de $+\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc montré (3.29).
(3.29) $\implies$ (3.28) : On suppose (3.29) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset V$. Comme $|a| + 1 \geq |a| \geq a$, on a, en posant $L = |a| + 1 > 0$, $]L; +\infty[\subset]a; +\infty[\subset V$. En appliquant (3.29) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]L; +\infty[$ à partir du rang N. Donc, comme $]L; +\infty[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.28). Passons au cas où $\ell = -\infty$.

Lire

(3.28) $\implies$ (3.30) : On suppose (3.28) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.28) au voisinage $V =]-\infty; -L[$ de $-\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc montré (3.30).
(3.30) $\implies$ (3.28) : On suppose (3.30) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; a[\subset V$. Comme $|a|+1 \geq |a| \geq -a$, on a en posant $L = |a|+1 > 0$, $-L < a$ donc $]-\infty; -L[\subset]-\infty; a[$. En appliquant (3.29) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]-\infty; -L[$ à partir du rang N. Donc, comme $]-\infty; -L[\subset]-\infty; a[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.28). □

Voyons quelques exemples, en commençant par un très important.

Proposition 3.41. *On considère la suite $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui, à $n \in \mathbb{N}$ associe $id(n) = n$. Autrement dit, $id = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim id = \lim\limits_{n\to+\infty} n$ existe et vaut $+\infty$.*

Preuve : On montre la proposition (3.29) avec u remplacée par id.
Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = L + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq L + 1$ donc $N > L$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n \geq N > L$ soit $n > L$. On a montré (3.29). □

Montrons maintenant que $-\infty = \lim\limits_n(-n^2)$ en utilisant (3.30).
Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = \sqrt{L+1}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \sqrt{L+1}$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante, $\sqrt{L+1} > \sqrt{L}$ d'où $N > \sqrt{L}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n^2 \geq N^2 > L$ donc $-n^2 < -L$. D'après (3.30), on a démontré la propriété souhaitée.

3.5 Propriétés générales de la limite d'une suite.

On se place de nouveau dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on établit plusieurs propriétés sur les limites finies de suite. On rappelle que l'on a défini le module d'une suite complexe et la valeur absolue d'une suite réelle dans la définition 3.19.

Proposition 3.42. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a*

$$\big(\lim u \,=\, \ell\big) \iff \big(\lim_n |u_n - \ell| \,=\, 0\big)\,. \tag{3.31}$$

En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\big(\lim u \,=\, 0\big) \iff \big(\lim |u| \,=\, 0\big)\,. \tag{3.32}$$

De plus, on a

$$\big(\lim u \,=\, \ell\big) \implies \big(\lim |u| \,=\, |\ell|\big)\,. \tag{3.33}$$

Enfin, on suppose qu'il existe une suite réelle $w : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \,\geq\, N) \implies \big(|u_n - \ell| \,\leq\, w_n\big)\big)\,. \tag{3.34}$$

Alors la suite u converge vers ℓ. (“Théorème des gendarmes”.)

Attention : il faut lire “$(\lim u \,=\, \ell)$” comme suit : “la limite de u existe et vaut ℓ”.

Lire

La réciproque de (3.33) est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : soit $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $|u| = u$ est constante égale à 1, on a $\lim u = 1 = \lim |u|$. On a aussi $\lim |u| = |-1|$. Si cette réciproque était vraie, on aurait alors $\lim u = -1$. Contradiction.

En raison d'une similitude avec une propriété, propre aux suites réelles, que l'on verra plus loin (cf. proposition 3.45 et (3.38)), il est légitime de qualifier la dernière propriété de la proposition 3.42 de “propriété des gendarmes” ou “théorème des gendarmes”.

Donnons tout de suite deux exemples d'application de cette proposition 3.42. On considère les suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = \sin(n)/n$ (où $\sin(\cdot)$ désigne la fonction sinus, cf. définition 8.20). On peut deviner que ces suites tendent vers 0. Vérifions-le à l'aide la proposition 3.42.

On remarque que la suite $|u|$ est en fait la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui tend vers 0 d'après la proposition 3.38. Le membre de droite de l'équivalence (3.32) est vrai donc, d'après l'équivalence, le membre de gauche est aussi vrai. On a montré que u tend vers 0.

En utilisant le fait que la fonction sinus est minorée par -1 et majorée par 1 (cf. proposition 8.21), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n)| \leq 1$ donc $|v_n - 0| \leq u_n$. On a donc la propriété (3.34) avec u remplacée par v, w remplacée par u et ℓ remplacée par 0, pour $N = 1$. Comme u tend vers 0, le théorème des gendarmes de la proposition 3.42 assure que v tend vers $\ell = 0$.

Preuve de la proposition 3.42. :

a). On montre d'abord la dernière propriété. Sous les hypothèses de son énoncé, on montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.27). Soit $\epsilon > 0$. Comme w tend vers 0, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq w_n < \epsilon$ soit vraie à partir du rang N_1 (cf. (3.27) avec u remplacée par w et ℓ remplacée par 0). Pour $n \in D$ avec $n \geq \max(N; N_1)$, on a $n \geq N$ donc, par (3.34),

$$\big|u_n - \ell\big| \,\leq\, w_n \,<\, \epsilon$$

car $n \geq N_1$. On a montré $\lim u = \ell$.

b). On remarque que, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n - \ell| - 0\big| \,=\, |u_n - \ell|$$

donc (3.27) est identique à (3.27) avec u remplacée par $|u - \ell|$ et ℓ remplacé par 0. Ceci prouve l'équivalence (3.31).

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

c). Montrons (3.33). On suppose que $\lim u = \ell$. Par (2.6), on a, pour tout $n \in D$,

$$\big||u_n| - |\ell|\big| \;\leq\; |u_n - \ell|\,.$$

Par l'hypothèse et (3.31), la suite $w = |u - \ell|$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, on peut appliquer le théorème des gendarmes à $|u|$ (cf. a)), qui donne $\lim |u| = |\ell|$. □

On montre maintenant que la convergence des suites est préservée par certaines opérations sur les suites.

Proposition 3.43. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{K}^2$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim(u + v) \;=\; \ell + \ell'\,, \quad \lim(\lambda u) \;=\; \lambda \cdot \ell\,, \quad \lim(uv) \;=\; \ell \cdot \ell'\,.$$

Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors la suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $1/\ell$, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} \;=\; \frac{1}{\ell}\,.$$

Preuve : Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $u + v$, c'est-à-dire la proposition (3.27) avec u remplacée par $u + v$ et ℓ remplacé par $\ell + \ell'$.
On remarque tout d'abord que, pour tout $n \in D$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \;=\; \big|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|\,, \tag{3.35}$$

d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.5) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.11) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant (3.35) et le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \;<\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon\,.$$

b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $u \cdot v$, c'est-à-dire la proposition (3.27) avec u remplacée par $u \cdot v$ et ℓ remplacé par $\ell \cdot \ell'$.
On écrit tout d'abord, pour tout $n \in D$,

$$(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell') \;=\; u_n \cdot (v_n - \ell') + (u_n - \ell) \cdot \ell'\,.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \;\leq\; |u_n| \cdot \big|v_n - \ell'\big| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'|\,. \tag{3.36}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$\epsilon' \;\in\; \left]0\,;\, \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right]\,.$$

Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \epsilon'$, $|u_n - \ell| < \epsilon'$ et donc aussi

$$|u_n| \;=\; \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |\ell| \;<\; \epsilon' + |\ell|\,.$$

Donc, d'après (3.36) et le choix de ϵ',

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \;<\; \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \;\leq\; \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \;\leq\; \epsilon\,.$$

On a montré $\lim(uv) = \ell\ell'$.

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

c). En remplaçant la suite v par la suite constante égale à λ, qui converge vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim(\lambda u) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la proposition 2.15, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim u = \ell$, le voisinage A contient tout les termes de la suite u à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Comme $A \cap B = \emptyset$, ces termes n'appartiennent pas à B donc ne peuvent être nuls, car $0 \in B$. Soit $D_0 = D \cap [\![N_0; +\infty[\![$. La suite

$$x \;=\; (1/u_n)_{n \in D_0}$$

est donc bien définie. Montrons qu'elle tend vers $1/\ell$, via la version appropriée de (3.27).
Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $n \in D_0$, on a $u_n \notin B$, donc $u_n \notin D(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u_n \notin I(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|u_n| \geq \delta_0$. De plus, pour $n \in D_0$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \;=\; \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \;=\; \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| \cdot |\ell|} \;\leq\; \frac{|u_n - \ell|}{\delta_0 \cdot |\ell|}\,. \tag{3.37}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0; \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D_0$ et $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et, d'après (3.37),

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \;<\; \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \;\leq\; \epsilon\,.$$

On a montré que $\lim(1/u) = 1/\ell$. □

Considérons un exemple simple d'application de cette proposition 3.43 d'opérations sur les limites finies. Soit $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n \;=\; \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}}\,.$$

On devine que x va tendre vers $1/3$. Rédigeons une preuve de ce fait en utilisant plusieurs propriétés de la proposition 3.43. Dans la pratique, la rédaction complète de la preuve serait trop fastidieuse. On en donne un résumé sans omettre les points importants.
On a vu plus haut que $\lim\limits_n(1/n)$ existe et vaut 0 (cf. proposition 3.38). Donc, par produit, $\lim\limits_n(1/n^2)$ existe et vaut 0. Comme une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.38), le numérateur de l'expression de x_n tend, par somme, vers $1 + 0 = 1$. Le même argument montre que le dénominateur de l'expression de x_n tend, par somme, vers $3 + 0 = 3$. Comme $3 \neq 0$, on a, par inversion,

$$\lim_n \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Enfin, par produit, $\lim\limits_n x_n$ existe et vaut $1/3$.
La phrase "Donc, par produit, $\lim\limits_n(1/n^2)$ existe et vaut 0." est un résumé du raisonnement complet suivant :
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. On vient de rappeler que $\lim u$ existe et vaut 0. On peut donc appliquer la proposition 3.43 avec $v = u$ et $\ell = \ell' = 0 \in \mathbb{R}$. Elle nous donne que $\lim uv = \ell\ell'$ c'est-à-dire que $\lim\limits_n(1/n^2)$ existe et vaut $0 \cdot 0 = 0$.
La phrase "Comme une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.38), le numérateur

de l'expression de x_n tend, par somme, vers $1+0=1$." est un résumé du raisonnement complet suivant : Comme $\lim\limits_n 1 = 1$ (cf. proposition 3.38 avec $D = \mathbb{N}^*$) et $\lim\limits_n(1/n^2)$ existe et vaut $0 \cdot 0 = 0$, on peut appliquer la proposition 3.43 avec $u = (1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $v = (1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\ell = 1$ et $\ell' = 0$. Elle nous donne que $\lim(u+v) = \ell + \ell'$ c'est-à-dire que $\lim\limits_n(1+(1/n^2))$ existe et vaut 1.
Par abus, on oublie souvent de rappeler qu'une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.38).
Un autre abus est fréquent. Il consiste, par exemple, à affirmer que, d'après la proposition 3.38, la suite $(1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$ tend vers 0. Expliquons pourquoi ceci est justifé.
Dans cette proposition 3.38, on a montré que la suite $(1/n)_{n\in[\![1;+\infty[\![}$ tend vers 0. En posant $D = [\![1;+\infty[\![$, $D' = [\![4;+\infty[\![$, on a $D \cap [\![4;+\infty[\![= [\![4;+\infty[\![= D' = D' \cap [\![4;+\infty[\![$. En posant $u = (1/n)_{n\in[\![1;+\infty[\![}$ et $v = (1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$, on peut appliquer la proposition 3.32 (avec $N = p = 4$ et $\ell = 0$) qui nous donne l'équivalence (3.23). Comme le membre de gauche de cette équivalence est vrai (cf. proposition 3.38), cette équivalence prouve que le membre de droite est aussi vrai. Donc $v = (1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$ tend vers 0.

Pour terminer ce paragraphe, donnons un résultat commode sur la convergence des suites complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une suite complexe dans la définition 3.19.
On veut étudier la limite de la suite $u = (3 + i/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On voit que $\Re(u)$ est la suite réelle constante égale à 3 sur $\mathbb{N}^*$. Elle converge donc vers 3. Quant à $\Im(u)$, c'est la suite réelle $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on a étudiée plus haut. On a vu qu'elle converge vers 0. Que peut-on dire sur la convergence de la suite u ? La proposition 3.44 ci-dessous permet de répondre.

Proposition 3.44. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim u = \ell \iff \Big(\big(\lim \Re(u) = \Re(\ell)\big) \quad et \quad \big(\lim \Im(u) = \Im(\ell)\big)\Big).$$

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

Preuve : On procède par double implication.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u = \ell$. Pour tout $n \in D$, on a, d'après (2.7),

$$\big|(\Re(u))_n - \Re(\ell)\big| = \big|\Re(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(u))_n - \Im(\ell)\big| = \big|\Im(u_n - \ell)\big| \leq |u_n - \ell|.$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 3.42 avec $v_n = |u_n - \ell|$, on en déduit que $\lim \Re(u)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim \Im(u)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\Re(u)$ converge vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ converge vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 3.43 (avec u remplacée par $\Im(u)$ et $\lambda = i$), $i\Im(u)$ converge vers $i\Im(\ell)$. Par la proposition 3.43 (avec u remplacée par $\Re(u)$ et v remplacée par $i\Im(u)$), $u = \Re(u) + i\Im(u)$ converge vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$. □

Exemple d'application : On s'intéresse maintenant à la suite $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $n > 0$, $v_n = (1/(n+1)) + ni$. On remarque que $\Im(v) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu plus haut que $\lim \Im(v) = +\infty$. Donc $\Im(v)$ n'a pas de limite finie. Par proposition 3.44, la limite de v n'existe pas puisque la proposition de droite de l'équivalence est fausse pour tout $\ell \in \mathbb{C}$.

3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles.

On revient dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les suites réelles, un pendant de la proposition 3.43 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la **convention** que l'on a prise au paragraphe 1.2 : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 3.45. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors u est strictement supérieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n > b$.*

2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors u est strictement inférieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n < b$.*

3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors u est bornée.*

4. *On suppose que u est inférieure à v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.*

5. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par u et v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n \leq v_n$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*

6. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par u à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*

7. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $x_n \leq v_n$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 3.45 à u (ou à u et v) que si l'on sait déjà que u a une limite (ou que u et v ont une limite).
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) sont infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$), alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$), alors u est strictement négative à partir d'un certain rang.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités $u_n \leq v_n$, qui sont vraies à partir d'un certain rang. Si l'on suppose que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit $u = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (0)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0 = v_n$. On a bien l'existence de $\lim u$ et de $\lim v$ mais $\lim u = 0 = \lim v$. La proposition $(\lim u > \lim v)$ est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $n \to \infty$ dans des inégalités strictes, on tombe sur une inégalité large.

Lire

On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des suites est constante. Par exemple, si l'on considère une suite réelle positive qui converge alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec u constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les suites u et v jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $u = -v$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $n \in D$, les équivalences

$$(u_n \leq x_n \leq v_n) \iff (-v_n \leq x_n \leq v_n) \iff (|x_n| \leq v_n)\,. \tag{3.38}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 3.42.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Preuve de la proposition 3.45 : Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(\ell - b)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (\ell - b)/2[)$ centré en ℓ.

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

Cas où $\ell = +\infty$: L'ensemble V est un voisinage de $+\infty$.
Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in v$, ce qui donne $u_n > b$.

2. Soit $V :=]-\infty; b[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(b-\ell)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (b-\ell)/2[)$ centré en ℓ.
Cas où $\ell = -\infty$: L'ensemble V est un voisinage de $-\infty$.
Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n < b$.

3. Comme $\ell \in \mathbb{R}$, u est majorée par $\ell+1$ à partir d'un certain rang, d'après 1. D'après la proposition 3.24, cela prouve que u est majorée. En utilisant 2 avec $b = \ell - 1$, on obtient que u est minorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi minorée, en utilisant encore la proposition 3.24. u est donc bornée.

4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. On montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=]-\infty; b[$ est un voisinage de ℓ'.
Cas où $\ell = +\infty$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell'$. V est un voisinage de $\ell = +\infty$. Si $\ell' = -\infty$, V' est un voisinage de ℓ'. Si $\ell' \in \mathbb{R}$, on a, comme $b > \ell'$, $b - \ell' > 0$ et V' contient l'intervalle $I(\ell'; b - \ell'[$ centré en ℓ', donc V' est un voisinage de ℓ'.
Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > b > \ell'$. Comme précédemment, V' est un voisinage de ℓ'. On a $\ell - b > 0$ et V contient l'intervalle $I(\ell; \ell - b[$ centré en ℓ, donc V est un voisinage de ℓ.
Comme $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$, il existe $(N_1; N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que, V contient les termes de u à partir du rang N_1 et V' contient les termes de v à partir du rang N_2. Soit $n \in D$ tel que $n \geq \max(N; N_1; N_2)$. On a donc $u_n \leq v_n$, car $n \geq N$, $u_n \in V$, car $n \geq N_1$ et $v_n \in V'$, car $n \geq N_2$. Donc $v_n < b < u_n$ et $u_n \leq v_n$, contradiction. Conclusion : $\ell \leq \ell'$.

5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (3.27) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim u$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\ell = \lim v$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N' = \max(N; N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$, $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, en utilisant la proposition 2.5,
$$\ell - \epsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < \ell + \epsilon\,,$$
c'est-à-dire $x_n \in I(\ell; \epsilon[$. On a montré (3.27) avec u remplacée par x, donc $\lim x$ existe et vaut ℓ.

6. On montre (3.29) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
$$x_n \geq u_n > L\,.$$
Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$.

7. On montre (3.30) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse). Soit $L > 0$. Comme $\lim v = -\infty$, le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
$$x_n \leq v_n < -L\,.$$
Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$. □

Maintenant, on reprend la situation de la proposition 3.43 mais pour des suites réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 3.46. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim(u+v) = \ell$;

b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim(u+v) = \ell$;

c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim(\lambda u) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim(\lambda u) = -\ell$;

d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim(\lambda u) = 0$;

e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim(uv) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim(uv) = -\ell$;

f). La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et $\lim(1/u) = 0$.

g). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = +\infty$.

h). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = -\infty$.

Quelques précisions s'imposent.
Pour $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, $-\ell$ signifie $+\infty$ si $\ell = -\infty$ et $-\ell$ signifie $-\infty$ si $\ell = +\infty$.
Dans le cas où $\ell' = -\ell$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, le résultat ne dit rien sur la suite $(u+v)$. La raison en est que tout peut se passer : On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = 0$. Plus généralement, étant donné $m \in \mathbb{R}$, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = m$. On peut aussi construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = +\infty$ ("u l'emporte sur v"). On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u+v) = -\infty$ ("v l'emporte sur u"). Enfin, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $(u+v)$ n'a pas de limite. C'est pourquoi l'on qualifie cette situation ($\ell' = -\ell$ pour $(u+v)$) comme indéterminée.

LIre

Une autre situation indéterminée est la suivante : $\ell' = 0$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ pour uv. Là encore, on peut donner des exemples de suites réelles u et v telles que leur produit tend vers un nombre réel non nul, ou bien telles que leur produit tend vers 0, ou bien telles que leur produit tend vers ℓ, ou bien telles que leur produit tend vers $-\ell$, ou encore telles que leur produit n'a pas de limite.
En utilisant le théorème des gendarmes, on peut montrer que la suite $w = ((-1)^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Comme tous les termes de w sont non nuls, $(1/w)$ est bien définie mais on peut vérifier qu'elle n'a pas de limite (cf. proposition 3.54). D'après le point g) de la proposition 3.46, w ne peut être à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. D'après le point h) de la proposition 3.46, w ne peut être à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang. Il est facile de retrouver cela directement : pour $N \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$ et $w_n < 0$ (il suffit de prendre n impair et supérieur à N) et on peut trouver un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq N$ et $w_p > 0$ (il suffit de prendre p pair et supérieur à N).

Preuve de la proposition 3.46 :

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ et où $\ell = -\infty$.
<u>Cas $\ell = +\infty$</u> : On montre que $\lim(u+v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L'; +\infty[$ de $+\infty$, avec $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.26) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n > L' + (\ell' - 1) \geq (L - \ell' + 1) + (\ell' - 1) = L\,.$$

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

On a montré que $\lim(u+v) = +\infty$.
Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.30), que le voisinage $]-\infty; -L'[$ de $-\infty$, avec $L' = \max(1; L+\ell'+1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.26) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell'-1; \ell'+1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L' + (\ell'+1) \leq -(L+\ell'+1) + (\ell'+1) = -L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

b). On sépare les cas où $\ell = \ell' = +\infty$ et où $\ell = \ell' = -\infty$.
Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim(u+v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = +\infty$, on sait, par la proposition (3.29) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]0; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n > L + 0 = L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = +\infty$.
Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.30), que le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = -\infty$, on sait, par la proposition (3.30) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]-\infty; 0[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L + 0 = -L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

c). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.29), que le voisinage $]L/\lambda; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n > \lambda \cdot \frac{L}{\lambda} = L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.
Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par la proposition (3.29), que le voisinage $]L/|\lambda|; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{L}{|\lambda|} = -L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par la proposition (3.30), que le voisinage $]-\infty; -L/|\lambda|[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -L/|\lambda|$ et, comme $\lambda > 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{-L}{|\lambda|} = -L\,.$$

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.
Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par la proposition (3.30), que le voisinage $]-\infty; -L/|\lambda|[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n \;=\; \lambda \cdot u_n \;>\; \lambda \cdot \frac{-L}{|\lambda|} \;=\; L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle converge vers 0.

e). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.45, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_1.
Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.45, que v est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.45), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.
Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.45, que v est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.45), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par le 2 de la proposition 3.45, que u est strictement négative à partir d'un certain rang N_1.
Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.45, que v est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.45), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.
Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.45, que v est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.45), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.

f). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.45, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.26).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]1/\epsilon; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/u_n) < \epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par le 2 de la proposition 3.45, que u est strictement négative à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.26).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, le voisinage $]-\infty; -1/\epsilon[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -(1/\epsilon) < 0$ donc $0 > (1/u_n) > -\epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.

g). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement positive à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.29).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n > 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) > L$. On a montré que $\lim(1/w) = +\infty$.

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

h). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement négative à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.30).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n < 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < -w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) < -L$. On a montré que $\lim(1/w) = -\infty$.
$\square$

Fait au 14-02-2023

On revient maintenant sur les notions de bornes supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, que l'on a introduites au paragraphe 1.2. On rappelle que l'on a décidé, par **convention**, que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Ainsi, pour une partie A non vide de $\mathbb{R}$, $+\infty$ est un majorant de A et $-\infty$ est un minorant de A (cf. paragraphe 1.2).

Proposition 3.47. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

1. *ℓ est adhérent à A si et seulement si ℓ est limite d'une suite d'éléments de A.*
2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathcal{S}_1 = (\ell = \sup A)\,, \tag{3.39}$$

$$\mathcal{S}_2 = \Big((\ell \textit{ majore } A) \textit{ et } (\ell \textit{ est adhérent à } A)\Big)\,, \tag{3.40}$$

$$\mathcal{S}_3 = \Big((\ell \textit{ majore } A) \textit{ et } (\ell \textit{ est limite d'une suite d'éléments de } A)\Big)\,. \tag{3.41}$$

3. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathcal{I}_1 = (\ell = \inf A)\,, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{I}_2 = \Big((\ell \textit{ minore } A) \textit{ et } (\ell \textit{ est adhérent à } A)\Big)\,, \tag{3.43}$$

$$\mathcal{I}_3 = \Big((\ell \textit{ minore } A) \textit{ et } (\ell \textit{ est limite d'une suite d'éléments de } A)\Big)\,. \tag{3.44}$$

Preuve :

1. On procède par double implication.
$\Longleftarrow$) : Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Comme ℓ est limite d'une suite $u : D \longrightarrow A$, V contient tous les termes de cette suite à partir d'un certain rang. Un tel terme appartient donc à $V \cap A$ donc $V \cap A \neq \emptyset$. On a montré que ℓ est adhérent à A.
$\Longrightarrow$) : On suppose que ℓ est adhérent à a. On sépare trois cas.
$\underline{\ell = +\infty}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, le voisinage $]n; +\infty[$ de $+\infty$ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $a_n > n$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, $\lim\limits_n a_n = +\infty$ par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45). Donc $\ell = +\infty$ est la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
$\underline{\ell = -\infty}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, le voisinage $]-\infty; -n[$ de $-\infty$ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $a_n < -n$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, $\lim\limits_n(-n) = -\infty$ par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.46) et $\lim\limits_n a_n = -\infty$ par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45). Donc $\ell = -\infty$ est limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
$\underline{\ell \in \mathbb{R}}$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le voisinage $]\ell - (1/n); \ell + (1/n)[$ de ℓ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $\ell - (1/n) < a_n < \ell + (1/n)$. Comme $\lim\limits_n(1/n) = 0$, $\lim\limits_n a_n = \ell$, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45). Donc ℓ est limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
2. On montre successivement les implications $\mathcal{S}_3 \Longrightarrow \mathcal{S}_2 \Longrightarrow \mathcal{S}_1 \Longrightarrow \mathcal{S}_3$.
$\mathcal{S}_3 \Longrightarrow \mathcal{S}_2$: Elle découle du 1.

$\mathcal{S}_2 \Longrightarrow \mathcal{S}_1$: Supposons qu'on ait un majorant m de A qui vérifie $m < \ell$. Alors $]m; +\infty[$ est un voisinage de ℓ. Comme ℓ est adhérent à A, ce voisinage contient un élément a de A. En particulier, $a > m$, ce qui contredit le fait que m est un majorant de A. Donc, pour tout majorant m de A, on a $m \geq \ell$. Comme ℓ est un majorant de A, c'est le plus petit. D'où $\ell = \sup A$.
$\mathcal{S}_1 \Longrightarrow \mathcal{S}_3$: On suppose $\ell = \sup A$. Donc $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.
<u>Cas où $\ell = +\infty$</u> : Par définition du sup, cela signifie que A est non majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n n'est donc pas un majorant de A donc il existe un $a_n \in A$ tel que $a_n > n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.45), $\lim a = +\infty$. Enfin, $+\infty$ est bien un majorant de A.
<u>Cas où $\ell \in \mathbb{R}$</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell - (1/n) < \ell$ et ℓ est le plus petit majorant de A, $\ell - (1/n)$ n'est pas un majorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n > \ell - (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ majore A, on a $a_n \leq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \ell - \frac{1}{n} < a_n \leq \ell\,.$$

Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ (cf. proposition 3.38), la suite $(\ell - (1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.43), donc, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.45), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un majorant de A.

3. On montre successivement les implications $\mathcal{I}_3 \Longrightarrow \mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathcal{I}_1 \Longrightarrow \mathcal{I}_3$.
$\mathcal{I}_3 \Longrightarrow \mathcal{I}_2$: Elle découle du 1.
$\mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathcal{I}_1$: Supposons qu'on ait un minorant m de A qui vérifie $m > \ell$. Alors $]-\infty; m[$ est un voisinage de ℓ. Comme ℓ est adhérent à A, ce voisinage contient un élément a de A. En particulier, $a < m$, ce qui contredit le fait que m est un minorant de A. Donc, pour tout minorant m de A, on a $m \leq \ell$. Comme ℓ est un minorant de A, c'est le plus grand. D'où $\ell = \inf A$.
$\mathcal{I}_1 \Longrightarrow \mathcal{I}_3$: On suppose $\ell = \inf A$. Donc $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.
<u>Cas où $\ell = -\infty$</u> : Par définition de l'inf, cela signifie que A est non minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ n'est pas un minorant de A donc il existe un $a_n \in A$ tel que $a_n < -n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Comme $\lim_n n = +\infty$, on a, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.43), $\lim_n(-n) = -\infty$, et, d'après le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.45), $\lim a = -\infty$. Enfin, $-\infty$ est bien un minorant de A.
<u>Cas où $\ell \in \mathbb{R}$</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\ell + (1/n) > \ell$ et ℓ est le plus grand minorant de A, $\ell + (1/n)$ n'est pas un minorant de A. Cela signifie que l'on peut trouver un $a_n \in A$ tel que $a_n < \ell + (1/n)$. Comme $a_n \in A$ et ℓ minore A, on a $a_n \geq \ell$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie

LIre

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \ell + \frac{1}{n} > a_n \geq \ell\,.$$

Comme la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et la suite constante égale à ℓ converge vers ℓ (cf. proposition 3.38), la suite $(\ell + (1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 3.43), donc, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 3.45), $\lim a = \ell$. Enfin, ℓ est bien un minorant de A. □

Ce résultat permet de justifier aisément quelques calculs de bornes, dans le cas où ses bornes ne sont ni un maximum ni un minimum. Par exemple, on devine que $\inf]0; 1] = 0$. On voit que 0 minore l'ensemble $]0; 1]$. De plus, 0 est aussi la limite de la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui est une suite d'éléments de $]0; 1]$. Donc, par la proposition 3.47, on obtient $\inf]0; 1] = 0$.
Pour déterminer rigoureusement la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et explicite de $\mathbb{R}$, on dispose donc, après avoir deviné ladite borne, de la proposition 3.47 lorsque ce n'est pas un maximum (resp. un minimum) et de la proposition 1.12 s'il s'agit d'un maximum (resp. un minimum).

On donne le résultat important suivant d'existence de limite pour les suites monotones.

Proposition 3.48. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle monotone. Alors $\lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Plus précisément,*

1. *si u est croissante alors $\lim u = \sup u$, où $\sup u := \sup u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$;*
2. *si u est décroissante alors $\lim u = \inf u$, où $\inf u := \inf u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.*

Preuve : On rappelle que $u(D)$ est la partie non vide $\{u_n; n \in D\}$ de $\mathbb{R}$.

a). Cas où u est croissante et $\sup u(D) = +\infty$. On montre que $\lim u = +\infty$ en utilisant (3.29).
Soit $L > 0$. Comme $\sup u(D) = +\infty$, il existe, par la proposition 3.47, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $+\infty$. Le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} > L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > L$. On a montré que $\lim u = +\infty$.

b). Cas où u est décroissante et $\inf u(D) = -\infty$. On montre que $\lim u = -\infty$ en utilisant (3.30).
Soit $L > 0$. Comme $\inf u(D) = -\infty$, il existe, par la proposition 3.47, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $-\infty$. Le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} < -L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < -L$. On a montré que $\lim u = -\infty$.

c). Cas où u est croissante et $\ell := \sup u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.27).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \sup u(D)$, il existe, par la proposition 3.47, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell; \epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell; \epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > \ell - \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \leq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). On a montré que $\lim u = \ell = \sup u(D)$.

d). Cas où u est décroissante et $\ell := \inf u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.27).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \inf u(D)$, il existe, par la proposition 3.47, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell; \epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell; \epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < \ell + \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \geq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). On a montré que $\lim u = \ell = \inf u(D)$. □

Voir la preuve correspondante pour les fonctions.

Voyons plus précisément ce nous donne le résultat précédent. Prenons, par exemple, une suite croissante $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ce résultat nous donne l'existence de la limite ℓ de u. Mais il nous dit aussi que $\ell = \sup u$ donc, en particulier, $\ell \geq u_0$ et même $\ell \geq u_{2022}$.
On peut retrouver ce dernier résultat en utilisant la proposition 3.45. Comme u est croissante, la proposition $(u_n \geq u_{2023})$ est vraie à partir d'un certain rang (par exemple, le rang 2023). Donc, par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient $\ell \geq u_{2023}$.

On termine ce paragraphe par un autre résultat important qui concerne les suites réelles "adjacentes".

Définition 3.49. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante,*

$$\forall n \in D\,, \quad u_n \leq v_n \tag{3.45}$$

et la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ *tend vers* 0.

Théorème 3.50. *Soit* D *une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *et deux suites réelles adjacentes* $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors elles convergent vers la même limite, i.e. il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $\lim u = \ell = \lim v$.

Preuve : Soit $n_0 = \min D$ (cf. proposition 1.10). Pour $n \in D$, on a $u_n \leq v_{n_0}$ d'après (3.45) et la décroissance de v. On a aussi $u_{n_0} \leq v_n$ d'après (3.45) et la croissance de u. Donc u est majorée par v_{n_0} et v est minorée par u_{n_0}. Donc $\ell := \sup u$ et $\ell' := \inf v$ sont réels. De plus, par la proposition 3.48 et les monotonies de u et v, $\lim u$ existe et vaut ℓ et $\lim v$ existe et vaut ℓ'. Comme, pour tout $n \in D$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$, et comme la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ tend vers 0, on a, par somme (cf. la proposition 3.43), $\ell = 0 + \ell' = \ell'$. □

3.7 Limite d'une suite et sous-suites.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement des sous-suites d'une suite ayant une limite, finie ou infinie. On donne aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On vérifie d'abord qu'une extractrice, qui est une suite réelle, tend forcément vers $+\infty$.

Proposition 3.51. *Soit* D' *une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *et* $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ *une extractrice. Alors* $\lim \varphi$ *existe et vaut* $+\infty$.

Preuve : Comme φ est une suite réelle croissante, $\lim \varphi$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et vaut $\sup \varphi(D')$, par la proposition 3.48. Montrons que $\sup \varphi(D') = +\infty$.

Lire.

Supposons que $\varphi(D')$, qui est une partie de $\mathbb{N}$, soit finie. Alors, par la définition 1.3, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $a_1; \cdots ; a_p$ deux à deux distincts de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(D') = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Comme $\varphi : D' \longrightarrow \varphi(D')$ est bijective, on a, en notant par ψ sa bijection réciproque, $D' = \{\psi(a_j); j \in [\![1; p]\!]\}$. Donc D' est finie (cf. définition 1.3). Contradiction. On a donc montré que $\varphi(D')$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D'après le 5 de proposition 1.10, $\varphi(D')$ n'est pas majorée. Donc $\sup \varphi(D') = +\infty$. □

Proposition 3.52. *Soit* D *une partie infinie de* $\mathbb{N}$ *et* $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. *On considère les deux situations :*

1. *On se place dans le cas où* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *et on considère un* $\ell \in \mathbb{C}$.
2. *On se place dans le cas où* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et on considère un* $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.

Dans ces deux cas, on a l'implication suivante :

$$\big(\lim u \text{ existe et vaut } \ell\big) \implies \Big(\text{pour toute sous-suite } v \text{ de } u\,, \quad \big(\lim v \text{ existe et vaut } \ell\big)\Big)\,. \tag{3.46}$$

Remarque 3.53. *Il se trouve que la réciproque de l'implication* (3.46) *est vraie. On a donc une caractérisation de la propriété* ($\lim u = \ell$). *On n'utilisera pas cette caractérisation ici, c'est pourquoi l'on se contente de montrer l'implication* (3.46).

Preuve de la proposition 3.52 : On suppose que u admet ℓ pour limite.
Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ une sous-suite de u. Il existe donc une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$. Montrons que v tend vers ℓ en utilisant (3.21) avec u remplacée par v. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.27) ou (3.28)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Comme $[N_0; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ et comme $\lim \varphi = +\infty$ par la proposition 3.51, $[N_0; +\infty[$ contient tous les termes de φ à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in D'$

avec $n \geq N_1$. On a donc $\varphi(n) \in [N_0; +\infty[$ soit $\varphi(n) \geq N_0$. Comme φ est à valeurs dans D et $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a $v_n \in V$. On a montré $\lim v = \ell$ via (3.21). $\square$

Une première application importante de cette proposition 3.52 consiste à utiliser directement l'implication. Si l'on souhaite étudier une suite et qu'on vérifie qu'elle est une sous-suite d'une suite ayant une limite, cette implication nous donne tout de suite que la suite étudiée tend vers la limite de l'autre suite. Par exemple, la suite $w = ((2n+5)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(1/p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, qui converge vers 0, donc w converge aussi vers 0.
On peut aussi exploiter l'implication de la proposition 3.52 par l'absurde. Pour montrer qu'une suite u n'a pas de limite, on suppose par l'absurde qu'elle en a une et on essaye de produire :

- deux sous-suites v et w de u telles que $\lim v$ et $\lim w$ existent mais sont différentes;
- ou bien une sous-suite v de u qui n'a pas de limite.

Voyons un exemple simple. On a déjà montré plus haut (cf. proposition 3.34) que la suite réelle $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Redémontrons ce résultat en utilisant la stratégie que l'on vient d'esquisser. On suppose que $\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de x tendent aussi vers $\lim x$, d'après la proposition 3.52. La suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$, donc cette suite converge vers 1 (cf. proposition 3.38). La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = (-1)\cdot((-1)^2)^n = -1$, donc cette suite converge vers -1 (cf. proposition 3.38), qui est différent de 1. On a donc une contradiction avec le fait que ces suites doivent tendre vers la même limite. L'hypothèse "$\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$" est donc fausse et on a montré que x n'a pas de limite.
Voyons un autre exemple (que l'on a utilisé plus haut, cf. paragraphe 3.6). Soit $w = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On montre que w n'a pas de limite.
Supposons que la limite ℓ de w existe. Comme les suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des sous-suites de w (cf. paragraphe 3.3.3), elles tendent aussi vers ℓ, par la proposition 3.52. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_{2n} = 2n$ et $w_{2n+1} = -(2n+1)$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, on a, par somme et produit (cf. proposition 3.46), $\lim\limits_n w_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_n w_{2n+1} = -\infty$. D'où $+\infty = -\infty$, ce qui est une contradiction. On a montré la

Proposition 3.54. *La suite $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

Grâce à cette proposition 3.52, combinée avec des résultats précédents, on peut montrer le résultat suivant sur les suites géométriques.

Proposition 3.55. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère les suites $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ données par, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n = z^n \quad \text{et} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k .$$

On a :

1. *Si $|z| < 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 0 et $\lim s$ existe et vaut $(1-z)^{-1}$.*
2. *Si $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$ alors $\lim u$ n'existe pas et $\lim s$ n'existe pas.*
3. *Si $z = x \in \mathbb{R}^+$ et $x > 1$ alors $\lim u$ et $\lim s$ existent et valent $+\infty$.*
4. *Si $z = 1$ alors $\lim u$ existe et vaut 1 et $\lim s$ existe et vaut $+\infty$.*

Fait au 01-03-23.

Preuve : Par la proposition 3.14, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 1$, $s_n = n+1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \neq 1$,

$$s_n = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{z^n - 1}{z-1} . \tag{3.47}$$

De plus, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u (car $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ est une extractrice), qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; z \cdot u_n\,. \tag{3.48}$$

1. Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 0$ (d'après les propositions 3.48 et 3.45). Comme $(|z|^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.52. On a

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad |z|^{n+1} \;=\; |z| \cdot |z|^n\,.$$

   Par les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.43), on a donc $\ell = |z| \cdot \ell$ soit $(1-|z|)\ell = 0$. Comme $|z| < 1$, $\ell = 0$. Comme cette suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $|u|$, on obtient par (3.32) que $\lim u$ existe et vaut 0. Par (3.47) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.43), on obtient $\lim s = (1-z)^{-1}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$. On suppose que $\ell = \lim u$ existe.
   <u>1er cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Par (3.48) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.43), on obtient $\ell = z \cdot \ell$ soit $(1-z)\ell = 0$. Comme $z \notin \mathbb{R}^+$, $z \neq 1$ d'où $\ell = 0$. Par l'hypothèse et l'implication (3.33), $\lim |u| = |\ell| = 0$. Comme $|z| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1. Donc, par passage à la limite dans les inégalités, $|\ell| \geq 1$. Contradiction avec $\ell = 0$. Donc $\lim u$ n'existe pas.
   Supposons que la limite de s existe dans $\mathbb{C}$. Par (3.47), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$(z\,-\,1) \cdot s_n \,+\, 1 \;=\; z^n\,.$$

   Par la proposition 3.43, on aurait $\lim u$ existe et vaut $(z-1)(\lim s)+1$. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.
   <u>2ième cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $z = x \in \mathbb{R}^{-*}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Si $\ell = +\infty$ alors, par (3.48) et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.46), on obtient $-\infty = +\infty$. Contradiction. Si $\ell = -\infty$, on obtient de même $+\infty = -\infty$. Contradiction. Donc $\ell \in \mathbb{R}$. Encore par (3.48) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.43), on obtient $\ell = x \cdot \ell$ soit $(1-x)\ell = 0$. Comme $x \neq 1$, $\ell = 0$. Comme $|x| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1 donc, par l'argument du cas précédent, on tombe aussi sur une contradiction. Donc $\lim u$ n'existe pas.
   Supposons que la limite de s existe dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Par (3.47), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$(x\,-\,1) \cdot s_n \,+\, 1 \;=\; x^n\,.$$

   Par la proposition 3.46, on aurait $\lim u$ existe car $x \neq 1$. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.

3. Prenons $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Donc u est strictement croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ qui vérifie $\ell = \sup u \geq u_1 = x \geq 1$, par la proposition 3.48. Si ℓ était réelle alors, par (3.48) et les opérations sur les limites (cf. proposition 3.43 ou proposition 3.46), on aurait $\ell = x \cdot \ell$ avec $x > 1$ et $\ell \neq 0$, c'est-à-dire une contradiction. Donc $\ell = +\infty$. Par (3.47) avec $z = x > 1$ et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.46), on obtient $\lim s = +\infty$.

4. Prenons $z = 1$. La suite u est alors constante égale à 1 donc converge vers 1 (cf. proposition 3.38). La suite s est une sous-suite de la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui tend vers $+\infty$, donc s tend aussi vers $+\infty$, par la proposition 3.52. □

On a vu plus haut qu'une suite réelle convergente est forcément bornée (cf. le 3 de la proposition 3.45). Mais une suite réelle bornée n'est pas forcément convergente comme le montre le contre-exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien bornée mais n'a pas de limite (cf. proposition 3.34). Cependant, une suite réelle bornée admet toujours une sous-suite convergente, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.56. Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit :*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que $u \circ \varphi$ soit convergente.

Pour démontrer ce résultat, on retrouve ici la difficulté signalée dans la remarque 3.3.
Pour préparer la preuve de ce théorème, on utilise tout d'abord un procédé de dichotomie pour construire des suites adjacentes vérifiant les propriétés du lemme suivant.

Lemme 3.57. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Il existe deux suites $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ adjacentes (i.e. α est croissante, β est décroissante, $\beta - \alpha$ est positive et tend vers 0) telles que $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$\big\{p \in D\,;\ u_p \in [\alpha_n\,;\,\beta_n]\big\}$$

est infini.

HP.

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Maintenant, on extrait une sous-suite appropriée vérifiant les conditions du lemme suivant.

Lemme 3.58. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Soit $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ deux suites vérifiant les conditions du lemme 3.57. Il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que*

HP.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha_n \ \leq\ u_{\varphi(n)} \ \leq\ \beta_n\,. \tag{3.49}$$

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Preuve du théorème 3.56 : On prend un minorant a de u et un majorant b de u. On applique successivement les lemmes 3.57 et 3.58. Par le théorème sur les suites adjacentes (cf. théorème 3.50), les suites α et β converge vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. D'après (3.49), le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45) montre que $u \circ \varphi$ admet ℓ pour limite. Puisque φ est une extractrice, $u \circ \varphi$ est bien une sous-suite de la suite u. □

3.8 Suites de Cauchy.

On donne ici les notions de suite de Cauchy et de complétude. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.59. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si*

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \ \geq\ N) \text{ et } (n \ \geq\ N)\big) \implies |u_m - u_n| \ <\ \epsilon\,. \tag{3.50}$$

Lorsque D est de la forme $[\![n_0;+\infty[\![$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut donner une formulation équivalente à (3.50), formulation qui est utile dans la pratique.

Proposition 3.60. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0;+\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. La proposition (3.50) est équivalente à*

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (n;p) \in D \times \mathbb{N}\,, \quad (n \ \geq\ N) \implies \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| \ <\ \epsilon\big)\,.$$

Lire.

Preuve : Appelons $\mathcal{Q}$ la nouvelle proposition.
(3.50) $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$: On suppose (3.50) vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.51}$$

Soit $n \in D$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$. On a $n + p \geq n \geq N$. Comme $D = [\![n_0; +\infty[\![$, $n + p \in D$. Donc, par (3.51) avec $m = n + p$, on obtient $|u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré $\mathcal{Q}$.
$\mathcal{Q} \Longrightarrow$ (3.50) : On suppose $\mathcal{Q}$ vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(n \geq N) \implies \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,. \tag{3.52}$$

Soit $(m; m') \in D^2$ avec $m \geq N$ et $m' \geq N$. Si $m \geq m'$, on peut écrire $m = m' + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.52) avec $n = m'$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. Si $m < m'$, on peut écrire $m' = m + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.52) avec $n = m$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré (3.50). □

Existe-t-il des suites de Cauchy ? Oui, il y a toutes les suites convergentes comme le montre la :

Proposition 3.61. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{K}$. On montre (3.50). Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in D$ avec $p \geq N$, on ait $|u_p - \ell| < (\epsilon/2)$. Soit $(m; n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire et la propriété précédente, on a

$$|u_m - u_n| = \big|(u_m - \ell) - (u_n - \ell)\big| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a montré (3.50) donc u est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. □

Concernant les suites de Cauchy réelles ou complexes, on a l'important résultat suivant :

Théorème 3.62. *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.*

L'intérêt principal de ce théorème 3.62 se révèle dans la situation suivante : lorsqu'on étudie la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et que l'on veut montrer qu'elle converge, on a besoin, par la nature des définitions et résultats des paragraphes précédents, de deviner la limite. Ce théorème 3.62 nous permet d'éviter cette contrainte car, pour l'appliquer, il suffit de montrer que la suite est de Cauchy, une notion qui ne fait pas apparaître la limite de la suite. Une bonne partie de l'étude des séries en L2 s'appuira sur cet avantage. Dans ce cours, on s'en servira pour justifier une définition de la fonction exponentielle (cf. paragraphe 9.4).

Depuis le début du cours, on aurait pu travailler avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et définir les notions de suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de convergence dans $\mathbb{Q}$. Un bon nombre de résultats précédents (mais pas tous) seraient encore valables dans ce cas. Mais le théorème 3.62 est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. C'est une des raisons pour lesquelles on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

On prépare la preuve du théorème 3.62 en établissant le lemme suivant.

Lemme 3.63. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui admet une sous-suite convergeant vers un certain $\ell \in \mathbb{K}$. Alors u converge aussi vers ℓ.*

Preuve : Par hypothèse, il existe une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$, D' étant une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle que $u \circ \varphi$ converge vers ℓ (cf. définition 3.28). Cela signifie que l'on a :

$$\forall\, \epsilon' > 0\,, \quad \exists\, N' \in \mathbb{N}\,; \quad \forall\, q \in D'\,, \quad \big(q \geq N' \implies |u_{\varphi(q)} - \ell| < \epsilon'\big)\,. \tag{3.53}$$

Lire.

Lire.

Comme u est une suite de Cauchy, on a (3.50) c'est-à-dire

$$\forall\, \epsilon_0 > 0\,, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N_0) \text{ et } (n \geq N_0)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon_0\,. \tag{3.54}$$

On montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.26).
Soit $\epsilon > 0$. D'après (3.53) avec $\epsilon' = \epsilon/2$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $q \in D'$ avec $q \geq N'$, on ait $|u_{\varphi(q)} - \ell| < \epsilon/2$. D'après (3.54) avec $\epsilon_0 = \epsilon/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < \epsilon/2$. Comme l'extractrice φ tend vers $+\infty$ (cf. proposition 3.51), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $q \in D'$ avec $q \geq N_1$, on ait $\varphi(q) > N$.
Soit $n \in D$ avec $n \geq N$. Soit $p \in D'$ tel que $p \geq \max(N'; N_1)$. On a donc $|u_{\varphi(p)} - \ell| < \epsilon/2$, car $p \geq N'$, et $\varphi(p) > N$, car $p \geq N_1$. De plus, comme $n \geq N$, on a $|u_{\varphi(p)} - u_n| < \epsilon/2$. Donc

$$|u_n - \ell| = |u_n - u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)} - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(p)}| + |u_{\varphi(p)} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a montré que u tend vers ℓ. □

Preuve du théorème 3.62 : On commence par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de Cauchy. On vérifie d'abord que u est bornée.
D'après (3.59), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < 1$. Soit $m_0 \in D$ tel que $m_0 \geq N$. On a, pour $n \in D$ avec $n \geq N$,

$$|u_n| = |u_n - u_{m_0} + u_{m_0}| \leq |u_n - u_{m_0}| + |u_{m_0}| \leq 1 + |u_{m_0}|\,.$$

Comme $D \cap [\![0;N]\!]$ est inclu dans $[\![0;N]\!]$, il est un ensemble fini (cf. proposition 1.10). Par la proposition 9.3, l'ensemble $\{|u_p|\,;\, p \in D \cap [\![0;N]\!]\}$ est aussi fini. Par la proposition 1.10, il admet un maximum $|u_{p_0}|$. Soit $M = 1 + |u_{m_0}| + |u_{p_0}|$. Pour $n \in D$, on a, si $n \geq N$, $|u_n| \leq 1 + |u_{m_0}| \leq M$ et, si $n \in D \cap [\![0;N]\!]$, $|u_n| \leq |u_{p_0}| \leq M$. Donc M majore $|u|$. Par la proposition 3.25, u est bornée.
On peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à u (cf. théorème 3.56). Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ et une sous-suite de u qui converge vers ℓ. D'après le lemme 3.63, u converge vers ce ℓ.
On a montré le résultat dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On passe au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de Cauchy. On vérifie que les suites réelles $\Re u$ et $\Im u$ sont des suites de Cauchy.
Soit $\epsilon > 0$. Comme u est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < \epsilon$. Pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on a donc, d'après (2.7),

$$\big|(\Re u)_m - (\Re u)_n\big| = \big|\Re(u_m - u_n)\big| \leq |u_m - u_n| < \epsilon$$

et

$$\big|(\Im u)_m - (\Im u)_n\big| = \big|\Im(u_m - u_n)\big| \leq |u_m - u_n| < \epsilon\,,$$

ce qui montrer que $\Re u$ et $\Im u$ sont des suites de Cauchy.
On peut donc appliquer le théorème 3.62 dans le cas réel, démontré plus haut, aux suites réelles $\Re u$ et $\Im u$. Il existe donc $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Re u$ tend vers x et $\Im u$ tend vers y. Comme $u = \Re u + i\Im u$, u converge vers $x + iy$, par la proposition 3.43. □

Lire.

4 Limites des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de cette partie est de construire une notion de limite pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes et d'étudier la notion de continuité qui lui est associée. À la différence des suites, pour lesquelles seule une limite à l'infini a un intérêt, d'autres situations pertinentes apparaissent : limite en un point du domaine de définition, limite au bord de ce domaine, limite à l'infini.