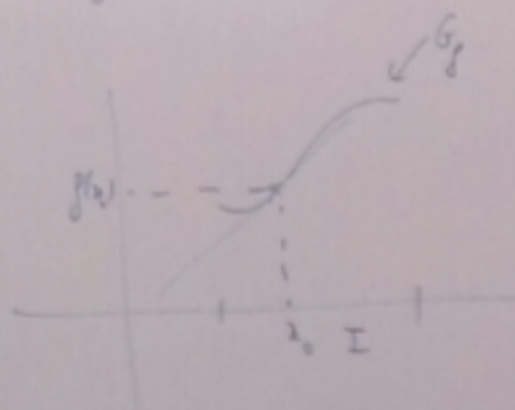


Graphes de fonctions

$f: I \xrightarrow{\text{int.}} \mathbb{R}$ dérivable



Soit $x_0 \in I$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Donc: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ tangente à f en x_0 .

Ex

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$x \mapsto x^2$$

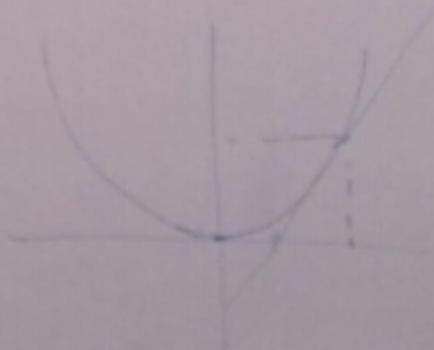
tangente à f en 1

$$f'(x) = 2x.$$

L'eq. de la tangente à f en 1:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$= 1 + 2(x - 1) = 2x - 1.$$



Soit f pa

Soit

avec

on dit q

$$\forall x \in$$

$$x_0 \in I \quad 2 \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi(x) = \varphi$$

Surfaces paramétrées

Soit $\varphi: I \xrightarrow{\text{int.}} \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x)).$$

avec φ_1 et $\varphi_2 \in C^1$.

On dit que φ est C^2 et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = (\varphi_1'(x), \varphi_2'(x)).$$

$$x_0 \in I \quad 2 \in \mathbb{R}.$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = (\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0), \varphi_2(x) - \varphi_2(x_0))$$

$$= \left(\varphi_1'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_1(x), \varphi_2'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon_2(x) \right)$$

$$= (x - x_0) \left(\varphi_1'(x_0), \varphi_2'(x_0) \right) + (x - x_0) \left(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x) \right).$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) +$$

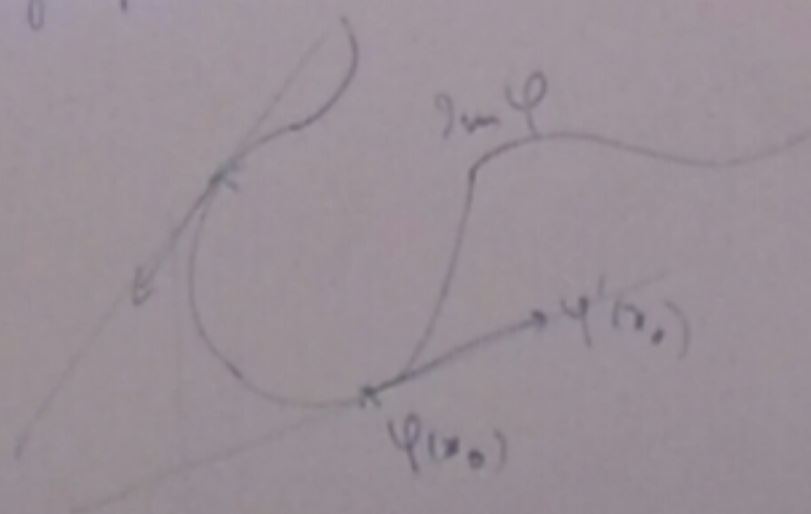
$$x \mapsto \varphi(x_0)$$

à part

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + (x-x_0)\varphi'(x_0) + \underbrace{(x-x_0)\tilde{\varepsilon}'(x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0}$$

$$x \mapsto \varphi(x_0) + (x-x_0)\varphi'(x_0) \quad \text{rect. tangent à } \varphi \text{ en } x_0.$$

à pour graphe une droite.

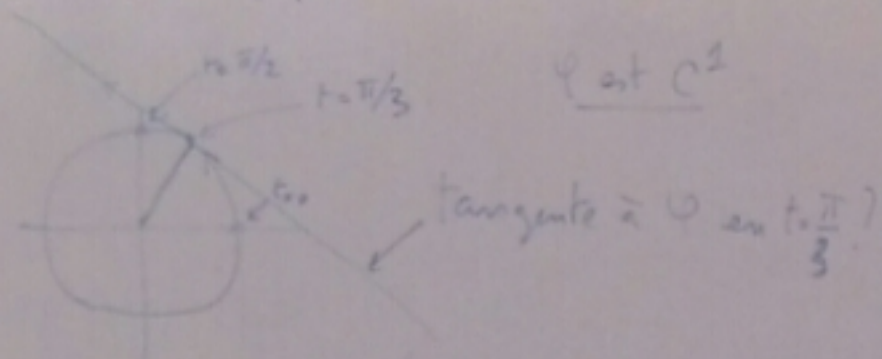


Exemple

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

φ est C^1



$$\text{On a } \varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

La tangente est paramétrée par:

$$t \mapsto \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) + (t - \frac{\pi}{3})\varphi'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + (t - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Courbes de niveau par une eq

$$\text{Soit } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; F(x, y) = 0\}$$

$$\text{Ex.: } F_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

$$\Gamma_0 = \{F_0 = 0\} = \text{Cercle de centre}$$

$$(0, 0) \text{ et de rayon } 1$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$$

$$\Gamma = \{F = 0\} = \text{Cercle centre en } (a, b) \text{ de rayon } R$$

Parfois, il est difficile de trouver
un paramétrage de Γ .

Si, de plus,

$$G(x, y)$$

Peut-on quand même trouver les
tangentes à Γ ?

$$\Gamma_G = \{G=0\}$$

$$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad (A)$$

comme F est C^2 ,

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

$$G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si, de plus, $(x, y), (x_0, y_0) \in \Gamma$

$G(x, y)$ est petit si (x, y) est
proche de (x_0, y_0)

$\Gamma_G = \{G=0\}$ est "proche" de Γ près (x_0, y_0)

La droite à condition que $(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$

Quand Γ_G est une droite, on dit que c'est la
tangente à Γ en (x_0, y_0)

Dans ce cas, le vect.

$$\vec{\text{grad}} F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est normal à Γ_G .

$$(x, y) \in \Gamma_G (=)$$

$$\vec{\text{grad}} F(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

produit scalaire

$\overrightarrow{\text{grad}} F(x_0, y_0)$ est le gradient
de F en (x_0, y_0) .

On peut vérifier que ψ est
un paramétrage de Γ près de (x_0, y_0) .

$$\psi(t_0) = (x_0, y_0) = \psi(t_0)$$

Γ_0 a pour eq paramétrique:

$$\{ \psi(t_0) + (t-t_0)\psi'(t_0), t \in \mathbb{R} \}.$$

$$\text{Ex } \Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \}$$

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2, R > 0$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$(x, y) \mapsto (x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2$$

$$\Gamma = \{ F=0 \}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x-a) \\ 2(y-b) \end{pmatrix}$$

Une eq. de la tangente à Γ
en $(x_0, y_0) \in \Gamma$:

20

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0) = 0$$

Vérifier que

$$\varphi: t \mapsto$$

$$\text{Soit } 2(x_0-a)(x-x_0) + 2(y_0-b)(y-y_0) = 0.$$

Une eq. de la tangente.

Ex:

$$(x_0-a)x + (y_0-b)y = (x_0-a)x_0 + (y_0-b)y_0$$

Cas particulier:

$$a=b=0, R=1$$

$$(x_0, y_0) = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Une eq. de la tang. en (x_0, y_0) :

$$\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Vérifier que cette droite est paramétrée par

$$\varphi: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{3} \\ t - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} + (t - \frac{\pi}{3}) \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{3} \\ \cos \frac{t}{3} \end{pmatrix}$$

Ex. $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1 \quad (F, p_1 - a)$
 $a > 0. \quad (x, y) \mapsto x - a.$

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma = \{F=0\} = \{x=a\}.$$

Soit $(a, z_0) \in \Gamma$ Tangente à Γ en (a, z_0) a pour eq.

$$1 \times (x - a) + 0 \times (y - z_0) = 0.$$

$$x = a.$$

Extréma d'une fonct.
 définie sur une courbe.

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$\varphi: I \rightarrow A \quad C^1$$

On s'intéresse aux extréma
 de $f|_{\text{Im} \varphi}$

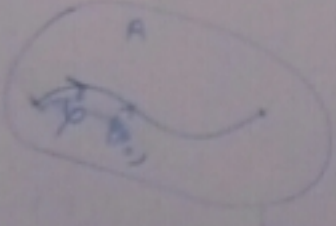
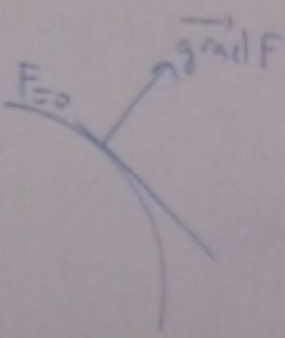
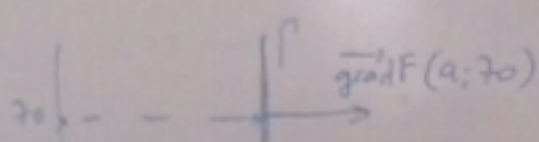
$$\text{Z.c.} \quad \Gamma = \{F=0\} \cap A$$

$$\text{où } F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1.$$

On s'intéresse
 à $f|_{\Gamma}$

per cas : le
 à trouver
 qui est

Pt critiques de
 $(f \circ \varphi)'(t)$



On s'intéresse aux extrema de $f|_P$.

Vérifier que cette droite $\varphi: t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \bar{t} \\ \sin \bar{t} \end{pmatrix}$

1^{er} cas: le problème se ramène à trouver les extrema de $f \circ \varphi$ qui est une fct. de I dans $\mathbb{R}$.

Ex: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $a > 0$. $(x, y) \mapsto$

$\text{grad } F(x, y) =$

Pt. critiques de $f \circ \varphi$:

$(f \circ \varphi)'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) \varphi_2'(t) = 0$

Soit $(a, 0) \in \Gamma$. $1 \times (x - a) + 0$

$x = a$

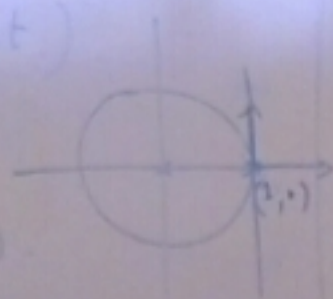
$(\Rightarrow) \text{grad } f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$

Ex: $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x$

$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto (\cos t; \sin t)$

$\Gamma = \varphi$

$\sup_{\Gamma} p_2 = \sup_{t \in [0, 2\pi]} p_2 \circ \varphi(t)$



$p_2 \circ \varphi(t) = \cos t$. $\cos$ $[0, 2\pi]$ at max en 0 et 2π .

$\sup_{\Gamma} p_2 = \max_{\Gamma} p_2 = \sup_{t \in [0, 2\pi]} \cos t = 1$

Ex: $\text{grad } p_2(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $\text{grad } p_2(2; 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2^{de} cas: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\Gamma = \{F=0\}$

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ Que peut-on dire des extrema de $f|_P$?

Si j'ai un paramétrage φ , je peux me ramener au cas précédent.

$$\overrightarrow{\text{grad}} p_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{m. } \overrightarrow{\text{grad}} p_2(2;0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$\Gamma = \{F=0\}$$

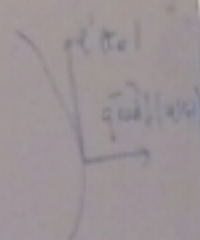
$\mathbb{R} \quad C^1$ Que peut-on dire

de Γ ?

Soit φ un paramétrage de Γ .

Si φ est max. en $\varphi(t_0)$,

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(\varphi(t_0)) \perp \varphi'(t_0)$$



D'autre part, $\forall t, F(\varphi(t)) = 0$

$$\forall t, (F \circ \varphi)'(t) = 0$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)) \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)) \varphi_2'(t) = 0$$

D'où

$$\overrightarrow{\text{grad}} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$$

D'où

$\overrightarrow{\text{grad}} f(\varphi(t_0))$ et $\overrightarrow{\text{grad}} F(\varphi(t_0))$ sont
colinéaires

Les pts critiques de $f|_{\Gamma}$

sont ceux pour lesquels

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0$$

Ceci ne dépend pas
du paramétrage φ !!

Ex: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x^3 - y^2 + 1$$

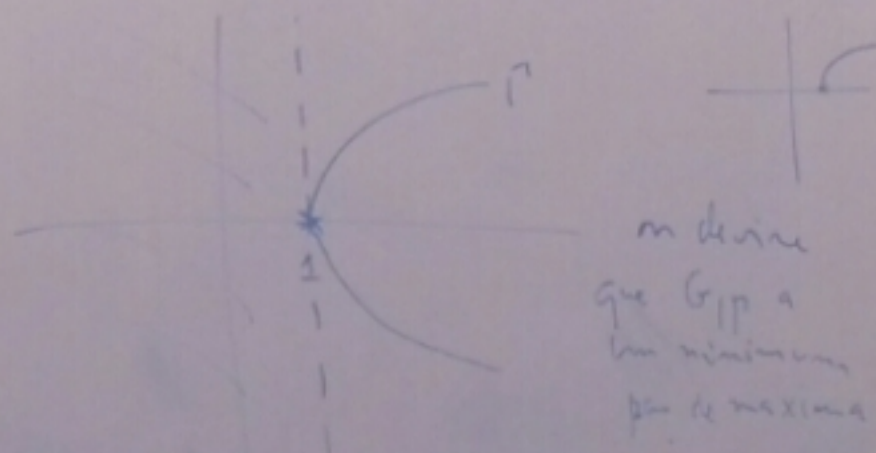
$$\begin{cases} x^3 - 1 = y^2 \\ y = 0 \\ y = \pm \sqrt{x^3 - 1} \end{cases}$$

$G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

$$\Gamma = \{F=0\}$$

On veut trouver les extr. de $G|_{\Gamma}$



on devine
que $G|_{\Gamma}$ a
un minimum
pas de maxima