4 Limites des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de cette partie est de construire une notion de limite pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes et d'étudier la notion de continuité qui lui est associée. À la différence des suites, pour lesquelles seule une limite à l'infini a un intérêt, d'autres situations pertinentes apparaissent : limite en un point du domaine de définition, limite au bord de ce domaine, limite à l'infini.

4.1 Propriétés des fonctions.

Comme pour l'étude des suites, on distingue des propriétés communes aux fonctions réelles et aux fonctions complexes d'autres propriétés qui sont propres aux fonctions réelles.

T.E.S.

4.1.1 Propriétés générales des fonctions.

Avant tout, on précise les fonctions que l'on va étudier. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une telle application est une fonction réelle. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une telle application est une fonction complexe. On note par $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$.*

Attention : La variable des fonctions considérées sera toujours réelle. Les valeurs sont toutes réelles pour une fonction réelle et toutes complexes pour une fonction complexe.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si l'on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée sans changer "ce que fait la fonction", on change tout de même de fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble de départ, on changera le nom de la fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble d'arrivée, on conservera souvent le nom de la fonction, ce qui constitue un abus de notation.
Pour que les fonctions soient bien définies, on doit veiller à ce que tout élément de l'ensemble de départ soit bien envoyé dans l'ensemble d'arrivée.
On s'intéressera aux fonctions dont le domaine de définition est une partie infinie de $\mathbb{R}$ et, le plus souvent, contient un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

Donnons quelques exemples de telles fonctions :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Par abus, on confondra f_1 et f_2. f_3 est la restriction à $\mathbb{R}^*$ de f_1. D'autres exemples :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \quad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x + ix^2 \end{array}.$$

Là encore, on confondra f_4 et f_5.

Comme pour les suites, on commence par définir des opérations sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont définies sur le même domaine de définition.

Définition 4.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) + g(x)$. La fonction h est la somme des fonctions f et g et est notée $h = f + g$.
On définit une nouvelle fonction $k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $k(x) = \lambda \cdot f(x)$. La fonction k

est le produit de la fonction f par le scalaire λ et est notée λf ou $\lambda \cdot f$.
Pour $c \in \mathbb{K}$, la fonction $j : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, qui à tout $x \in \mathcal{D}$ associe $j(x) = c$ est appelée la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$.

T.E.S.

La fonction nulle sur D est la fonction constante égale à 0 sur $\mathcal{D}$.
Une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur $\mathcal{D}$) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = c$.

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$, alors qu'elles sont différentes.

En considérant $f_7 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_7(x) = x^2$, en plus des fonctions précédentes, on a $f_6 = f_2 + i f_7$.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 4.2, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Admise.

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$ (cf. paragraphe 1.1), on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. On voit que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. Toute fonction $f \in \mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ admet comme fonction opposée la fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $x \in \mathcal{D}$, $g(x) = -f(x)$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a \;=\; \lambda\,(\mu a)\,,\; (\lambda + \mu)\,a \;=\; \lambda a + \mu a\,,\; \lambda\,(a + b) \;=\; \lambda a + \lambda b\,,\; 1 \cdot a \;=\; a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f; g) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{D}})^2$,

$$(\lambda\mu)f \;=\; \lambda\,(\mu f)\,,\; (\lambda + \mu)\,f \;=\; \lambda f + \mu f\,,\; \lambda\,(f + g) \;=\; \lambda f + \lambda g\,,\; 1 \cdot f \;=\; f\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ muni des lois de la définition 4.2 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Remarque 4.4. *On peut montrer, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.18, que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, si $\mathcal{D}$ est un ensemble infini.*

Voyons maintenant d'autres opérations et propriétés sur les fonctions.

T.E.S.

Définition 4.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de f par g est la fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. On note h par fg ou $f \cdot g$.
Soit $\mathcal{D}_0$ une partie non vide de $\mathcal{D}$. La fonction $f_0 : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ qui, à $x \in \mathcal{D}_0$, associe $f(x)$, est la restriction de f à $\mathcal{D}_0$. On note $f_0 = f_{|\mathcal{D}_0}$.
Si $\mathcal{D}_1$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si $h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle dont l'image $h(\mathcal{D}_1)$ est incluse dans $\mathcal{D}$, alors la composition $f \circ h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $(f \circ h)(x) = f(h(x))$.
Soit $|f| : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $(|f|)(x) = |f(x)|$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le module de f et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la valeur absolue de f.
Les fonctions réelles $\operatorname{Re} f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(f(x))$, respectivement, sont les parties réelle et imaginaire de la fonction f.
On dit que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 si l'on a l'équivalence : $(x \in \mathcal{D}) \iff (-x \in \mathcal{D})$.
On dit que f est (une fonction) paire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est (une fonction) impaire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} f = f$ et $\operatorname{Im} f = 0$. Ces notions de parties réelle et imaginaire ne sont donc vraiment utiles que dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction module est l'application $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à un complexe z, associe son module $|z|$. Lorsque $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, le module de f, défini dans la définition 4.5, est en fait la composition

$|\cdot| \circ f$ de la fonction module par f.
On a bien sûr la même chose dans $\mathbb{R}$, en remplaçant la fonction module par sa restriction à $\mathbb{R}$, à savoir la fonction valeur absolue. Pour une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, sa valeur absolue est le composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction valeur absolue avec f.
En reprenant les exemples précédents, $f_1 = \operatorname{Re} f_6$ et $f_4 = \operatorname{Im} f_6$. On a aussi $f_4 = f_1 \cdot f_1 = f_1^2$. On remarque que f_2 est impaire, que f_5 est paire et que f_3 est impaire ($\mathbb{R}^*$, le domaine de définition de f_3, est bien symétrique par rapport à 0).

T.E.S.

4.1.2 Propriétés propres aux fonctions réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les fonctions réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f est croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \,,\, \Big((x \leq x') \implies (f(x) \leq f(x')) \Big) \,.$$

On dit que f est strictement croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \,,\, \Big((x < x') \implies (f(x) < f(x')) \Big) \,.$$

On dit que f est décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \,,\, \Big((x \leq x') \implies (f(x) \geq f(x')) \Big) \,.$$

On dit que f est strictement décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \,,\, \Big((x < x') \implies (f(x) > f(x')) \Big) \,.$$

On dit que f est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}'$ si la restriction $f_{|\mathcal{D}'}$ de f à $\mathcal{D}'$ est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone).

Donnons quelques exemples. Une fonction constante est croissante et aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à x associe x, est strictement croissante. Elle est aussi croissante. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas croissante (ni strictement croissante) puisque $-2 < -1$ et $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$. Elle n'est pas non plus décroissante (ni strictement décroissante) puisque $2 > 1$ et $f(2) = 4 > 1 = f(1)$.

Définition 4.7. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que f est majorée par a si a majore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq a$.
On dit que f est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit majorée par b.
On dit que f est minorée par a si a minore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq a$.
On dit que f est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit minorée par b.
On dit que f est bornée si f est majorée et f est minorée.

T.E.S.

Lorsqu'une fonction est minorée par 0*, on dit qu'elle est positive.*
Lorsqu'une fonction est majorée par 0*, on dit qu'elle est négative.*
La borne supérieure de f*, notée* $\sup f$ *est* $\sup f(\mathcal{D})$*, la borne supérieure de l'image* $f(\mathcal{D})$ *de* $\mathcal{D}$ *par* f*.*
La borne supérieure de f*, notée* $\inf f$ *est* $\sup f(\mathcal{D})$*, la borne supérieure de l'image* $f(\mathcal{D})$ *de* $\mathcal{D}$ *par* f*.*
Soit $\mathcal{D}_0$ *est une partie non vide de* $\mathcal{D}$*.*
On note par

$$\sup_{\mathcal{D}_0} f$$

la borne supérieure $\sup f_{|\mathcal{D}_0}$ *de la restriction* $f_{|\mathcal{D}_0}$ *de* f *à* $\mathcal{D}_0$*.*
On note par

$$\inf_{\mathcal{D}_0} f$$

la borne inférieure $\inf f_{|\mathcal{D}_0}$ *de la restriction* $f_{|\mathcal{D}_0}$ *de* f *à* $\mathcal{D}_0$*.*

Comme pour les suites, on donne une caractérisation de la bornitude en utilisant la valeur absolue.

Proposition 4.8. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big(\big(f \text{ est bornée}\big) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big|f(x)\big| \leq m\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose f bornée. Par la définition 4.7, il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $m_- \leq f(x) \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a $f(x) \leq m_+ \leq m$ et $-f(x) \leq -m_- \leq m$, donc $|f(x)| = \max(f(x); -f(x)) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| \leq m$ soit $f(x) \in I(0; m]$. Par la proposition 2.5 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-m \leq f(x) \leq m$. Donc f est majorée par m et minorée par $-m$. Par la définition 4.7, elle est donc bornée. □

4.2 Limites et continuité de fonction.

On introduit ici la notion de limite pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On commence par donner une définition générale abstraite. Ensuite, on donne une définition équivalente mais plus concrète dans les différents cas : limite finie en un point; limite finie à l'infini; limite infinie en un point; limite infinie à l'infini. On introduit aussi la notion de continuité en un point du domaine de définition.

4.2.1 Définition générale.

Pour une fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, on souhaite donner un sens précis à l'énoncé : "La fonction f tend vers une limite en un certain endroit". La définition choisie devra respecter l'intuition selon laquelle si f tend vers une limite quelque part, elle ne peut y avoir qu'une limite. Cette définition doit aussi refléter le comportement de f à l'endroit choisi.
Par exemple, il n'apparaît pas pertinent de parler de la limite de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en -1, puisque -1 est "loin" du domaine de définition de la fonction. Il s'agit donc de préciser où l'on va considérer une limite pour f.
C'est précisément dans ce but que l'on a introduit la notion de point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.8) et qu'on a indiqué quand $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.12). On va définir la notion de limite d'une fonction en un $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à son domaine de définition.

T.E.S.

Quelles sont les limites possibles ? Comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera prise parmi les éléments de $\mathbb{K}$ et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on permettra à $+\infty$ et à $-\infty$ d'être une telle limite. On utilise la notion de voisinage associée à de telles limites. Voir les définitions 2.3, 2.7 et 2.11. On renvoie au paragraphe 2.4 pour une compilation des principales propriétés de ces voisinages.
On utilise aussi la notion de voisinage associée aux endroits où l'on considère la limite d'une fonction. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, voir la définition 2.7. Lorsque $a \in \{-\infty; +\infty\}$, voir la définition 2.11.

Remarque 4.9. *Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*
D'après la proposition 2.15, on sait que l'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a et qu'une partie contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a. Si a appartient à $\mathbb{R}$, tout voisinage de a contient a.
D'après la proposition 2.9 et la définition 2.12, a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ si et seulement si tout voisinage U de a rencontre $\mathcal{D}$, c'est-à-dire $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.
Si a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et U_0 est un voisinage de a, on voit, par la proposition 2.15, que a est aussi adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.

Définition 4.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de f en a si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.1}$$

On remarque que la proposition

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.2}$$

signifie $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$.

Si a n'est pas adhérent à $\mathcal{D}$, il existe un voisinage U de a tel que $U \cap \mathcal{D} = \emptyset$ et la proposition (4.2) est vraie quel que soit ℓ et quel que soit $V \in \mathcal{V}$ car le membre de gauche de l'implication est toujours faux. Dans ce cas, tout ℓ serait limite de f en a. Cela ne correspond pas à ce que l'on souhaite pour une limite, c'est pourquoi on a imposé que a soit adhérent à $\mathcal{D}$.
En revanche, si a est adhérent à $\mathcal{D}$, cela implique que, pour tout voisinage U de a, $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. En particulier, pour un tel voisinage U de a, on peut toujours trouver un $x \in \mathcal{D}$ qui vérifie aussi $x \in U$.

Proposition 4.11. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$. Si (4.1) est vraie et si (4.1), avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.*

Preuve : On montre que $\ell = \ell'$ par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la proposition 2.16, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de f en a, il existe, d'après (4.1), $U_1 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in A$. Comme ℓ' est limite de f en a, il existe, d'après (4.1) (avec ℓ remplacée par ℓ'), $U_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in B$. Par la remarque 4.9, $U_1 \cap U_2$ est un voisinage de a. Comme a est adhérent à $\mathcal{D}$, $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{D}$ est non vide. Pour $x \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{D}$, on a donc $f(x) \in A$, car $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, et $f(x) \in B$, car $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. On a montré que $\ell = \ell'$. $\square$

Cette proposition permet de parler de "la" limite d'une fonction, lorsqu'elle existe.

Définition 4.12. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. S'il existe ℓ tel que (4.1) est vraie, on dit que ℓ est la limite de f en a ou que f tend vers ℓ en a et on note*

$$\ell = \lim_a f \quad \text{ou} \quad \ell = \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

T.E.S.

Attention : Il est important de rappeler qu'une fonction peut ne pas avoir de limite en a. La proposition (4.1) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. On verra des exemples plus loin. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une fonction qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. "Étudier la limite d'une fonction" signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

Que se passe-t-il lorsque $a \in \mathcal{D}$? Bien sûr, a est adhérent à $\mathcal{D}$. La limite en a peut ne pas exister. Si elle existe, en revanche, c'est forcément $f(a)$! C'est ce que l'on montre dans la proposition suivante :

Proposition 4.13. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Si la limite de f en a existe alors elle vaut $f(a)$.*

Preuve : Soit ℓ la limite de f en a. Comme $a \in \mathcal{D}$, $f(a)$ est défini dans $\mathbb{K}$. Supposons $f(a) \neq \ell$. Alors, par la proposition 2.16, il existe $A \in \mathcal{V}_{f(a)}$ et $B \in \mathcal{V}_\ell$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Par (4.1), il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset B$. Comme U est un voisinage de a, il contient a (cf. proposition 2.15). Comme $a \in \mathcal{D}$, $a \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(a) \in B$. Comme A est un voisinage de $f(a)$, A contient $f(a)$ (cf. proposition 2.15). Donc $f(a) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. L'hypothèse $f(a) \neq \ell$ est absurde, donc $f(a) = \ell$. $\square$

Définition 4.14. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$.*
Si la limite de f en a existe (dans ce cas, c'est $f(a)$), on dit que la fonction f est continue en a.
On dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}'$, i.e. si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est continue en a, ou encore si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, $\lim\limits_a f$ existe.
On dit que f est continue si elle est continue sur $\mathcal{D}$.

On donne maintenant une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. Ce résultat ressemble à la proposition 3.55 sur le lien entre la nature d'une suite et celle de ses sous-suites.

Proposition 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On a l'implication*

$$\big(\ell \text{ est limite de } f \text{ en } a\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\text{pour toute suite } u : D \longrightarrow \mathcal{D} \text{ tendant vers } a, \text{ la suite } f \circ u \text{ tend vers } \ell\big).$$

Remarque 4.16. *Il se trouve que la réciproque de l'implication de la proposition 4.15 est vraie. L'équivalence obtenue constitue une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. Cependant, c'est surtout l'implication de cette proposition 4.15 que l'on utilisera.*

Preuve de la proposition 4.15 : Implicitement ci-dessus, D désigne une partie infinie de $\mathbb{N}$.
On suppose que ℓ est limite de f en a. Soit $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ une suite tendant vers a. On montre que la suite $f \circ u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ tend vers ℓ en utilisant (3.23) avec u remplacée par $f \circ u$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Comme u tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que U contient tous les termes de u à partir du rang N (cf. (3.23) avec ℓ remplacée par a). Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in U \cap \mathcal{D}$ et, comme $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a donc $f(u_n) \in V$. On a montré que $\ell = \lim(f \circ u)$. $\square$

Voyons un exemple simple d'application de ce résultat. Considérons la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On devine que f n'a pas de limite en 0 car "elle saute de -1 à 1". Montrons cela par l'absurde.
On suppose que $\ell = \lim\limits_a f$ existe. Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n = 1/n$ et $v = -u$. On sait que u tend vers 0. Il en est de même pour v d'après les opérations sur les limites de suite (cf. proposition 3.46). Donc, par l'implication de la proposition 4.15, $\lim(f \circ u) = \ell = \lim(f \circ v)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f \circ u)(n) = f(u_n) = f(1/n) = 1$, car $1/n > 0$, et $(f \circ v)(n) = f(v_n) = f(-1/n) = -1$, car $-1/n < 0$. Les suites $(f \circ u)$ et $(f \circ v)$ sont constantes donc $-1 = \lim(f \circ v)$ et $1 = \lim(f \circ u)$. Contradiction car $-1 \neq 1$. On a bien montré que f n'a pas de limite en a.
On remarque que cet argument est proche de l'utilisation de sous-suites pour montrer qu'une suite n'a

pas de limite, utilisation que l'on a illustrée dans le paragraphe 3.7.
On sauvegarde ce résultat dans la

T.E.S.

Proposition 4.17. *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'a pas de limite en 0.*

Selon l'intuition, on s'attend à ce que l'on ne change pas la limite d'une fonction en a si l'on change la fonction "loin" de a. C'est ce que démontre la proposition suivante.

Proposition 4.18. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}$ et qu'il existe un voisinage $U_0 \in \mathcal{V}_a$ tel que $\mathcal{D} \cap U_0 = \mathcal{D}' \cap U_0$. En particulier, a est adhérent à $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D} \cap U_0 \neq \emptyset$.*
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que f et g coïncident sur U_0, i.e. telles que

$$\forall x \in (U_0 \cap \mathcal{D}) \,, \quad f(x) \;=\; g(x) \,.$$

Soit h la restriction de f à $U_0 \cap \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \tag{4.3}$$

et

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big) \,. \tag{4.4}$$

Preuve : Par la remarque 4.9, a est adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.

a). On montre (4.3).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_a f$. On montre que $\ell = \lim\limits_a h$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par h. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $h(x) = f(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap \mathcal{D}$ et $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a $f(x) \in V$. D'où $h(x) = f(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim\limits_a h$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_a h$. On montre que $\ell = \lim\limits_a f$ en utilisant (4.1). Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$ (cf. (4.1) avec f remplacée par h), puisque $\mathcal{D} \cap U_0$ est le domaine de définition de h. Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $f(x) = h(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0))$ et $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$, on a $h(x) \in V$. Donc $f(x) = h(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim\limits_a f$.

b). On montre (4.4). On note que h est aussi la restriction à $\mathcal{D} \cap U_0$ de g. En appliquant (4.3) puis (4.3), avec f remplacée par g, on a

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big) \,.$$

On a bien montré (4.4). □

On peut reformuler la définition 4.10 en utilisant la notions de voisinage dans $\mathcal{D}$ d'un point et de voisinage dans $\mathcal{D}$ de l'infini, notions introduites dans les définitions 2.10 et 2.14. On rappelle à ce sujet les proposition 2.15 et remarque 2.17.

Proposition 4.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (4.1) *est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \,, \quad \exists W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}} \,; \quad \forall x \in \mathcal{D} \,, \quad \big((x \in W) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.5}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell \,, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}} \,. \tag{4.6}$$

Preuve : On montre successivement les implications (4.1) $\implies$ (4.5) $\implies$ (4.6) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.5) : On suppose (4.1) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. $W := U \cap \mathcal{D}$ est la trace sur $\mathcal{D}$ du voisinage U de a donc $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in W$, on a $f(x) \in V$ car $f(W) \subset V$. On a montré (4.5).
(4.5) $\implies$ (4.6) : On suppose (4.5) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ tel que $f(W) \subset V$. Donc $W \subset f^{-1}(V)$. Par la propriété 2 de la proposition 2.15 (cf. remarque 2.17), $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. On a montré (4.6).
(4.6) $\implies$ (4.1) : on suppose (4.6) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Donc il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f^{-1}(V) = U \cap \mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D} = f^{-1}(V)$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On remarque une similitude entre cette proposition 4.19 et la proposition 3.38 sur les limites de suite.

4.2.2 Limite en un point.

T.E.S.

Dans ce paragraphe, on considère le cas où l'on regarde une limite en un point $a \in \mathbb{R}$. On va introduire des notions de limite à droite, de limite à gauche, et de limite épointée, en a. On donne aussi des formulations concrètes de la définition de ces limites.

Dans le paragraphe 4.2.1, on a vu que la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'avait pas de limite en 0. Cependant, cette fonction est constante égale à 1 sur $]0; +\infty[$. On a envie de dire qu'elle tend vers 1 quand x tend vers 0 en restant strictement positif. À cet effet, on va introduire une notion de limite à droite en 0. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 4.20. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. On pose*

$$\mathcal{D}_{\neq a} := (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D} \,, \quad \mathcal{D}_a^+ :=]a; +\infty[\cap \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_a^- :=]-\infty; a[\cap \mathcal{D} \,.$$

1. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$ de f à $\mathcal{D}_{\neq a}$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite épointée de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) := \lim_{\neq a} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_{\neq a}} \,.$$

2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^+}$ de f à $\mathcal{D}_a^+$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à droite de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) := \lim_{x \to a^+} f(x) := \lim_{a^+} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^+} \,.$$

3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^-}$ de f à $\mathcal{D}_a^-$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à gauche de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) := \lim_{x \to a^-} f(x) := \lim_{a^-} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^-} \,.$$

T.E.S.

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. On dit que f est continue à droite en a si la limite à droite de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) \;=\; \lim_{a^+} f\,.$$

5. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. On dit que f est continue à gauche en a si la limite à gauche de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) \;=\; \lim_{a^-} f\,.$$

Quelques commentaires s'imposent. Prenons $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et un réel a adhérent à $\mathcal{D}$. Tout d'abord, la limite en a d'une restriction de f est définie par la définition (4.10) avec f remplacée par cette restriction et $\mathcal{D}$ remplacé par le domaine de définition de la restriction.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;3[$.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-\infty;0]$.
On a déjà expliqué au paragraphe 4.2.1 pourquoi on ne considère que la limite en un endroit a qui est adhérent au domaine de définition de la fonction considérée. Ceci explique l'hypothèse d'adhérence dans tous les points de la définition 4.20.
On note que si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ (resp. $\mathcal{D}_a^-$), il est automatiquement adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ puisque $\mathcal{D}_a^+ \subset \mathcal{D}_{\neq a}$ (resp. $\mathcal{D}_a^- \subset \mathcal{D}_{\neq a}$). On note aussi que, si a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$, il est adhérent à $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}_{\neq a} \subset \mathcal{D}$.
Bien sûr, si $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}$, la limite épointée de f en a est la limite tout court de f en a, si cette dernière existe. C'est le cas pour la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $1/x^2$ et $a = 0$. On verra plus loin que $\lim\limits_0 g$ est $+\infty$.
On a un phénomène similaire pour la limite à droite si $\mathcal{D}_a^+ = \mathcal{D}$ ou pour la limite à gauche si $\mathcal{D}_a^- = \mathcal{D}$. Ces notions de limites sont donc intéressantes dans les autres cas.
Revenons à l'exemple, considéré plus haut, de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait que sa limite n'existe pas mais la fonction $f_{|]0;+\infty[}$, qui est constante égale à 1, a 1 pour limite en 0 (comme on le vérifiera plus loin). Il en est de même de $f_{|]-\infty;0[}$ qui tend elle vers -1 en 0. Comme $f(0) = 0 \notin \{-1;1\}$, f n'est ni continue à droite en 0 ni continue à gauche en 0. Il se trouve que la limite épointée de f en 0 n'existe pas (voir (4.7) ci-dessous).

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.*

1. *Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$ telle que a soit adhérent à $\mathcal{D}'$. Si $\lim\limits_a f$ existe alors $\lim\limits_a (f_{|\mathcal{D}'})$ existe aussi et vaut $\lim\limits_a f$.*

2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et à $\mathcal{D}_a^-$ (il est donc adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$). On a l'équivalence suivante :*

$$\left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{a^+} f \text{ et } \lim_{a^-} f \text{ existent et coïncident}\right). \tag{4.7}$$

Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{\neq a} f = \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f$.

3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \notin \mathcal{D}$, on a l'équivalence*

$$\left(\lim_a f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right). \tag{4.8}$$

Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_a f = \lim\limits_{\neq a} f$.

T.E.S.

4. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \in \mathcal{D}$, on a l'équivalence*

$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe et vaut } f(a)\right). \tag{4.9}$$

Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{\neq a} f = f(a)$.

Preuve : On remarque tout d'abord que l'on a $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}_a^- \cup \mathcal{D}_a^+$, que, si $a \notin \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$, et que, si $a \in \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a} \cup \{a\}$. On pose $f_a = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$, $f^+ = f_{|\mathcal{D}_a^+}$ et $f^- = f_{|\mathcal{D}_a^-}$. On remarque que $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^+} = f^+$ et $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^-} = f^-$.

1. Soit $\ell = \lim\limits_{a} f$. On montre que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}'}$.
   Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a, comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f_{|\mathcal{D}'}(x) = f(x) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$.

2. On montre les deux implications de (4.7) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_{a} f_a$ existe. On doit vérifier que $\lim\limits_{a} f^+ = \ell = \lim\limits_{a} f^-$.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^-$. On obtient $\lim\limits_{a} f^-$ existe et vaut ℓ.
   On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^+$. On obtient $\lim\limits_{a} f^+$ existe et vaut ℓ.
   On a montré que $\lim\limits_{a} f^-$ et $\lim\limits_{a} f^+$ existent et valent ℓ.
   $\Longleftarrow$) : On suppose maintenant que $\lim\limits_{a} f^+$ et $\lim\limits_{a} f^-$ existent et sont égales. On appelle ℓ la valeur commune. On montre que $\lim\limits_{a} f_a$ existe et vaut ℓ, en utilisant (4.1) avec f remplacée par f_a.
   Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U^+ de a tel que $f^+(U^+ \cap \mathcal{D}_a^+) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^+). Par hypothèse, il existe aussi un voisinage U^- de a tel que $f^-(U^- \cap \mathcal{D}_a^-) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^-). Soit $U = U^+ \cap U^-$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$ avec $x \in U$. On a $x \neq a$. Si $x > a$, $x \in \mathcal{D}_a^+$ et, comme $U \subset U^+$, $x \in U^+$. Comme $x \in (U^+ \cap \mathcal{D}_a^+)$, $f(x) \in V$. Si $x < a$, $x \in \mathcal{D}_a^-$ et, comme $U \subset U^-$, $x \in U^-$. Comme $x \in (U^- \cap \mathcal{D}_a^-)$, $f(x) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a} f_a = \ell$.

3. On suppose $a \notin \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$ et $f = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$. On a donc (4.8) et égalité des limites en cas d'existence.

4. On prend $a \in \mathcal{D}$. On montre les deux implications de (4.9) et l'affirmation qui la suit.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim\limits_{a} f$ existe. On sait qu'elle vaut $f(a)$ (cf. proposition 4.13). On applique le 1 avec $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$. On obtient $\lim\limits_{\neq a} f$ existe et vaut $f(a)$.
   $\Longleftarrow$) : On suppose que $\lim\limits_{a} f_a$ existe et vaut $f(a)$. On doit vérifier que $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut $f(a)$. On utilise (4.1) avec ℓ remplacée par $f(a)$.
   Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f_a(U \cap \mathcal{D}_{\neq a}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$. Si $x = a$ alors $f(x) = f(a) \in V$, car V est un voisinage de $f(a)$ (cf. proposition 2.15). Si $x \neq a$, $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$. Comme $x \in U$, $x \in U \cap \mathcal{D}_{\neq a}$ donc $f(x) = f_a(x) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a} f = f(a)$. □

Maintenant, on va voir des reformulations équivalentes et plus maniables de la définition 4.10 lorsque $a \in \mathbb{R}$ mais en distinguant les cas où la limite est finie de ceux où la limite est infinie.

T.E.S.

On commence par des reformulations équivalentes dans le cas d'une limite finie en un point. On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 4.22. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.10}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.11}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.12}$$

C'est surtout la proposition (4.11) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Seulement l'équivalence entre (4.1) et (4.11).

Preuve de la proposition 4.22 : On montre successivement les implications (4.1) $\implies$ (4.10) $\implies$ (4.11) $\implies$ (4.12) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.10) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.10).
(4.10) $\implies$ (4.11) : On suppose (4.10) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages réels de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| < \delta$, on a $x \in I(a; \delta[$, donc $x \in U$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.11).
(4.11) $\implies$ (4.12) : On suppose (4.11) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. Comme $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $f(x) \in D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donc $f(x) \in V$. On a montré (4.12).
(4.12) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.12) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

T.E.S.

Voyons quelques exemples de limites finies en un point. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $c \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$. On s'attend à ce qu'elle tende vers c en a. Vérifions-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = 2023$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_a f = c$.
En particulier, f est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Voyons un autre exemple. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in \mathcal{D}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. On devine que la limite de Id en a est a. Montrons-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par a.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|\mathrm{Id}(x) - a| = |x - a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|\mathrm{Id}(x) - a| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_a \mathrm{Id} = a$.
En particulier, la fonction Id est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Dans la preuve précédente, on aurait pu aussi prendre $\delta = (\epsilon/2)$, ou $\delta = (\epsilon/3)$ ou même n'importe quel nombre dans $]0; \epsilon]$.
Un exemple similaire est le suivant. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $t_b(x) = x - b$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on devine que t_b tend vers $a - b$ en a. Montrons-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par $a - b$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|t_b(x) - (a - b)| = |x - b - (a - b)| = |x - a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|t_b(x) - (a - b)| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_a t_b = a - b$. En particulier, la fonction t_b est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 4.14).
On a montré la

Proposition 4.23. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide $\mathbb{R}$ et $(b; c) \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On considère les fonctions : $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}(x) = x$, pour $x \in \mathcal{D}$; $g_c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par $g_c(x) = c$, pour $x \in \mathcal{D}$; $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $t_b(x) = x - b$, pour $x \in \mathbb{R}$.*

T.E.S.

1. *Les fonctions* $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$, g_c *et* t_b *sont continues.*
2. *En* a, $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ *admet* a *pour limite et* g_c *admet* c *pour limite.*

Revenons à l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait qu'elle n'a pas de limite en 0 (cf. proposition 4.17). On a affirmé plus haut qu'elle admet des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes. Vérifions ce point. Plus précisément, montrons que $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$.
Comme $f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ est constante égale à 1 et comme $f_{|\mathbb{R}^{-*}}$ est constante égale à -1, on a le résultat cherché d'après le cas constant traité plus haut. En utilisant (4.7), on retrouve que $\lim\limits_{\neq 0} f$ n'existe pas. Par (4.9), on retrouve aussi que $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas.
Toujours pour cette fonction f, que se passe-t-il en un point $a \neq 0$? Si $a > 0$ alors f coïncide avec la fonction constante égale à 1 sur le voisinage $]a/2; +\infty[$ de a. De plus, cette fonction constante à une limite en a. Donc, par la proposition 4.18, $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to a} 1 = 1$. Si maintenant $a < 0$, on obtient par le même raisonnement que $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to a} (-1) = -1$. La fonction f est donc continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.
Donnons un exemple de fonction complexe. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$fx) \;=\; \frac{2 \,+\, 3ix}{1 + x^2}\,.$$

On devine que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut 2. On le montre en utilisant (4.11).
Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) \,-\, 2| \;=\; \left|\frac{2 \,+\, 3ix \,-\, 2(1 + x^2)}{1 + x^2}\right| \;=\; \frac{|3ix \,-\, 2x^2|}{1 + x^2} \;\leq\; |3ix \,-\, 2x^2|$$

car $1 + x^2 \geq 1$. De plus, $|3ix \,-\, 2x^2| = |x| \cdot |3i - 2x| \leq |x|(3 + 2|x|)$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $5\delta \leq \epsilon$ et $\delta \leq 1$. C'est possible puisque l'on peut prendre $\delta = \min(1; (\epsilon/5))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \delta$, on a, d'après le calcul précédent, $|f(x) - 2| \leq |x|(3 + 2|x|) < \delta(3 + 2\delta) \leq \delta \cdot 5 \leq \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{0} f = 2$.
Comme 0 est dans le domaine de définition de f et que la limite de f en zéro existe, f est continue en 0.

On reformule maintenant la définition des limites infinies en un point. On se place donc dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.24. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ *et* $a \in \mathbb{R}$, *qui est un point adhérent à* $\mathcal{D}$.
Pour $\ell = +\infty$, *la proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.13}$$

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.14}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.15}$$

Pour $\ell = -\infty$, *la proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.16}$$

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.17}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.18}$$

C'est surtout les propositions (4.14) et (4.17) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Admise.

Preuve de la proposition 4.24 : On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.13) $\Longrightarrow$ (4.14) $\Longrightarrow$ (4.15) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.13) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = +\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.13).
(4.13) $\Longrightarrow$ (4.14) : On suppose (4.13) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, $x \in I(a; \delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.14).
(4.14) $\Longrightarrow$ (4.15) : On suppose (4.14) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]L; +\infty[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) > L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. On a $f(x) > L$ donc $f(x) \in]L; +\infty[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.15).
(4.15) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.15) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Passons maitenant au cas où $\ell = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.16) $\Longrightarrow$ (4.17) $\Longrightarrow$ (4.18) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.16) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = -\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty; -L[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]-\infty; -L[$ soit $f(x) < -L$. On a montré (4.16).
(4.16) $\Longrightarrow$ (4.17) : On suppose (4.16) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty; -L[$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, $x \in I(a; \delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in]-\infty; -L[$ soit $f(x) < -L$. On a montré (4.17).
(4.17) $\Longrightarrow$ (4.18) : On suppose (4.17) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]-\infty; -L[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) < -L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. On a $f(x) < -L$ donc $f(x) \in]-\infty; -L[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.18).
(4.18) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.18) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). $\square$

T.E.S.

Étudions deux exemples. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe $f(x) = 1/x$. On remarque que 0 est bien adhérent à $\mathbb{R}^{+*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut $+\infty$, en utilisant (4.14).
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $|x| < \delta$, on a $0 < x < 1/L$ donc $f(x) = 1/x > L$. On a montré (4.14).
Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \neq 0$ associe $h(x) = 1/x$. On devine que h n'a pas de limite en 0 car ses limites à droite et à gauche existent mais sont différentes. Montrons cela.
La restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap]0; +\infty[$ est f et $\lim\limits_{0} f = +\infty$. Donc $\lim\limits_{0^+} h$ existe et vaut $+\infty$.
Appelons g la restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap]-\infty; 0[= \mathbb{R}^{-*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut $-\infty$, en utilisant (4.17) avec f remplacée par g.
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$ avec $|x| < \delta$, on a $-1/L < x < 0$ donc $1/(-Lx) > 1$ et donc $g(x) = 1/x < -L$. On a montré (4.17).
Ainsi $\lim\limits_{0^-} h$ existe et vaut $-\infty \neq +\infty$. Donc h n'a pas de limite en 0 par (4.7) (avec f remplacée par h).

4.2.3 Prolongement par continuité.

On reste dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 4.25. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathcal{D})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$*

T.E.S.

tel que $\ell = \lim\limits_{a} f$ *existe dans* $\mathbb{K}$. *L'application* $\hat{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ *définie par* $\hat{f}(x) = f(x)$, *si* $x \in \mathcal{D}$, *et* $\hat{f}(a) = \ell$, *est appelé prolongement par continuité de* f *en* a.

Remarquons que, dans le cadre de cette définition 4.25, le prolongement $\hat{f}$ de f en a est automatiquement continue en a. En effet, la limite $\lim\limits_{\neq a} \hat{f}$ existe et vaut $\lim\limits_{a} f$, puisque $(\hat{f})_{|\mathcal{D}_{\neq a}} = f$. De plus, comme $\hat{f}(a) = \ell = \lim\limits_{\neq a} \hat{f}$, la limite de $\hat{f}$ en a existe, par (4.9) avec f remplacée par $\hat{f}$. D'après la définition 4.14, $\hat{f}$ est continue en a.
Voyons des exemples et un contre-exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/|x|$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? On étudie sa limite en 0. On remarque que la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ est constante égale à 1 donc elle tend vers 1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^+} f$ existe et vaut 1. Comme la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$ est constante égale à -1, elle tend vers -1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^-} f$ existe et vaut -1. Comme $\lim\limits_{0^+} f \neq \lim\limits_{0^-} f$, f n'a pas de limite en 0. Elle ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0.
En revanche, on peut prolonger par continuité en 0 la restriction f^+ de f à $\mathbb{R}^{+*}$. La limite de f^+ en 0 est en fait la limite à droite de f en 0, qui est $1 \in \mathbb{R}$. Donc f^+ admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction $\widehat{f^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^+}(x) = 1$.
On peut aussi prolonger par continuité en 0 la restriction f^- de f à $\mathbb{R}^{-*}$, puisque f^- a pour limite $-1 \in \mathbb{R}$ en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction $\widehat{f^-} : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^-}(x) = -1$.
Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $g(x) = x^2/x$. Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = x$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} x = 0$, par le 3 de la proposition 4.21, donc $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut 0. Le prolongement par continuité de g en 0 est donc l'application $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{g}(x) = g(x) = x^2/x = x$, si $x \neq 0$, et $\hat{g}(0) = 0$. Donc $\hat{g} = \mathrm{Id}$.

4.2.4 Limite à l'infini.

On reprend ici la démarche suivie dans le paragraphe 4.2.2 précédent mais pour $a \in \{-\infty; +\infty\}$. Comme il n'y a pas lieu d'introduire des limites à gauche ou à droite dans ce cas, on se concentre sur des reformulations concrètes des limites.

On commence par les limites finies. On a donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.26. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \{-\infty; +\infty\}$ *qui est adhérent à* $\mathcal{D}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$.
Pour $a = +\infty$, *la proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.19}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.20}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\ell}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.21}$$

Pour $a = -\infty$, *la proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.22}$$

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.23}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\ell}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.24}$$

T.E.S.

C'est surtout les propositions (4.20) et (4.23) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite. Donnons un exemple. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On devine que sa limite en $+\infty$ existe et vaut 0. Vérifions-le avec (4.20).
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $A = 1/\epsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x > A$, on a $f(x) = 1/x < 1/A = \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/x) = 0$.

Admise.

Preuve de la proposition 4.26 : On traite d'abord le cas où $a = +\infty$.
On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.19) $\Longrightarrow$ (4.20) $\Longrightarrow$ (4.21) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.19) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.19).
(4.19) $\Longrightarrow$ (4.20) : On suppose (4.19) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A;+\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A;+\infty[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.20).
(4.20) $\Longrightarrow$ (4.21) : On suppose (4.20) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.21).
(4.21) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A;+\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Voyons maintenant le cas $a = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.22) $\Longrightarrow$ (4.23) $\Longrightarrow$ (4.24) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.22) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{-\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.22).
(4.22) $\Longrightarrow$ (4.23) : On suppose (4.22) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $-\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]-\infty;-A[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, $x \in]-\infty;-A[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.23).
(4.23) $\Longrightarrow$ (4.24) : On suppose (4.23) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.24).
(4.24) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.24) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]-\infty;-A[$. C'est un voisinage de $-\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x < -A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On traite les limites infinies. On prend donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

T.E.S.

Proposition 4.27. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \{-\infty;+\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \{-\infty;+\infty\}$.*
Pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.25}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.26}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.27}$$

Pour $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.28}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.29}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.30}$$

T.E.S.

Pour $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.31}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.32}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.33}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.34}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.35}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.36}$$

C'est surtout les propositions (4.26), (4.29), (4.32) et (4.35) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Admise.

Preuve de la proposition 4.27 : On traite successivement les quatres cas.
Premier cas : $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.25) $\implies$ (4.26) $\implies$ (4.27) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.25) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]L; +\infty[$, c'est-à-dire $f(x) > L$. On a montré (4.25).
(4.25) $\implies$ (4.26) : On suppose (4.25) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $f(x) > L$. On a montré (4.26).
(4.26) $\implies$ (4.27) : On suppose (4.26) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]L; +\infty[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) > L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) > L$ soit $f(x) \in]L; \infty[\subset V$. On a montré (4.27).
(4.27) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Deuxième cas : $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.28) $\implies$ (4.29) $\implies$ (4.30) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.28) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty; -L[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]-\infty; -L[$, c'est-à-dire $f(x) < -L$. On a montré (4.28).
(4.28) $\implies$ (4.29) : On suppose (4.28) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $f(x) < -L$. On a montré (4.29).
(4.29) $\implies$ (4.30) : On suppose (4.29) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]-\infty; -L[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) < -L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) < -L$ soit $f(x) \in]-\infty; -L[\subset V$. On a montré (4.30).
(4.30) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.30) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Troisième cas : $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.31) $\implies$ (4.32) $\implies$ (4.33) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.31) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{-\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]L; +\infty[$, c'est-à-dire $f(x) > L$. On a montré (4.31).
(4.31) $\implies$ (4.32) : On suppose (4.31) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $-\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $A > 0$ tel que