

D'autre part, $\forall t, F(\varphi(t)) = 0$

$\forall t, (f \circ \varphi)'(t) = 0$

$$\text{Donc } \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_2(t) = 0$$

D'où $\text{grad } F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$

D'où $\text{grad } f(\varphi(t))$ et $\text{grad } F(\varphi(t))$ sont colinéaires
Les points critiques $F|_P$ sont ceux pour lesquels

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(u,v) & \frac{\partial F}{\partial y}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

Ceci ne dépend pas du paramétrage φ !

Ceci ne dépend pas du param.

Exemple:

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

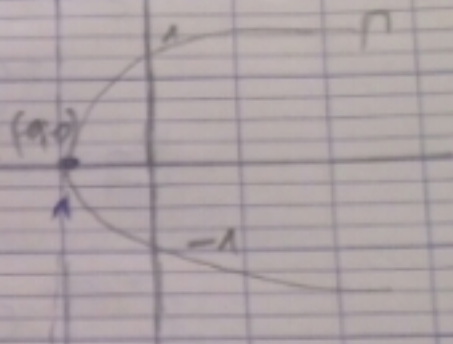
$$(x,y) \mapsto x^3 - y^2 + 1$$

$$g) G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

On veut trouver les extrêmes de $G|_P$

$G|_P$ a un min pas de max



F et G sont C^1

$$\text{grad } F(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -2y \end{pmatrix}$$

$$\text{grad } G(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

Si (x_0, y_0) est un extrême de $G|_P$ alors c'est un point critique au sens suivant

$$\det(\text{grad } F(x_0, y_0), \text{grad } G(x_0, y_0)) = 0$$

Recherche des points critiques:

$$D = \begin{vmatrix} 3x^2 & 2x \\ -2y & 2y \end{vmatrix} = 2(3xy + 2xy) = 2xy(3x+2)$$

$$\begin{cases} D=0 \\ (x,y) \in \Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases} \text{ et } x^3 - y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = \begin{cases} (0,-1) \text{ ou } (0,1) \\ (-1,0) \\ \text{ou} \\ (-\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{17}{27}}) \\ \text{ou} \\ (-\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{17}{27}}) \end{cases}$$

$$G(0,-1) = G(0,1) = G(-1,0) = 1$$

$$G(-\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{17}{27}}) = G(-\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{17}{27}}) = \frac{31}{27} > 1$$

G n'a pas de max global sur Γ

$$\text{Pour } t > 0, \underbrace{G(t, \sqrt{t^3+1})}_{\in \Gamma} = t^3 + t^2 + 1 \rightarrow +\infty$$

Pour G_Γ n'est pas majorée et $\sup G = +\infty$

G a un mini global

Comme $G \geq 0$, $\inf_{\Gamma} G \geq 0$

Si $|x| > 1$ ou $|y| > 1$ et $(x,y) \in \Gamma$, $|x| > 1$ ou $|y| > 1$ et $(x,y) \in \Gamma$, $G(x,y) = x^3 + y^2 > 1 = G(0,1)$

$$G(t, \sqrt{t^3+1}) = t^3 + t^2 + 1 \rightarrow +\infty \text{ as } t \rightarrow +\infty$$

majorée et Soit $A = \{ |x| \leq 1 \} \cap \{ |y| \leq 1 \} \cap \Gamma$

Comme $A \subset \Gamma$, $\inf_A G \geq \inf_{\Gamma} G$

$\inf_A G \leq G(0,1) = 1$ car $(0,1) \in A$

Soit $(x,y) \in \Gamma$. Si $(x,y) \notin A$, on a vu d/le que $G(x,y) > 1 = G(0,1) > \inf_A G$

que $G(x,y) > 1 = G(0,1) > \inf_A G$

Si $(x, y) \in A$, $G(x, y) \geq \inf_A G$
 par def. de la borne inf.

Donc $\inf_P G \leq \inf_A G$.

Par def. $\inf_P G$, on a

$$\inf_P G \geq \inf_A G.$$

$$\text{Donc } \inf_P G = \inf_A G.$$

A est donc fermé.

$A \subset B(0, 0; \sqrt{2})$ donc est borné

A est donc compact.

$G|_A$ est une fct
 continue, elle
 a des bornes.

Il existe $(x_0, y_0) \in A$

$$\inf_P G = \inf_A G = G(x_0, y_0).$$

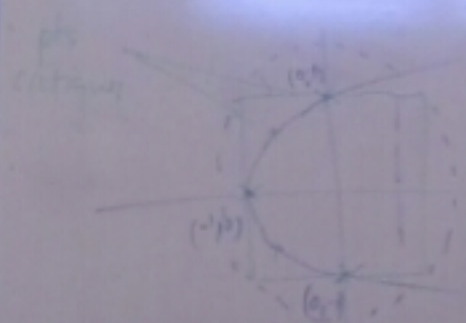
(comme G est C^1)

(x_0, y_0) est un

pt. critique.

$(x_0, y_0) \in A$

Donc $\inf_P G = G(x_0, y_0)$.



Extréma de G sur Γ .
 global

G

$G|_A$ est une fct continue sur un
 compact, elle atteint donc
 ses bornes.

Il existe $(x_0, y_0) \in A$;

$$\inf_P G = \inf_A G = G(x_0, y_0).$$

(comme G est C^1 (et F aussi))

(x_0, y_0) est un pt. critique.

Nécessairement

$$(x_0, y_0) \in \{(0, -1); (0, 1); (-1, 0)\}.$$

est borné.

$$\text{Donc } \inf_P G = G(0, 1) = 1.$$

Intégration

Intégration

- rappels des intés. simples.
- intégrales doubles.
- intégrales simples généralisées.
- intégrales dépendant d'un paramètre simple.

Intégrales simples:

$a < b$ de $\mathbb{R}$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C} \text{)}.$$

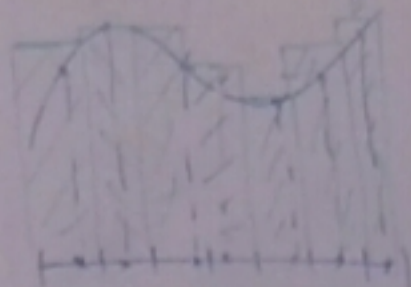
continue par morceaux.

(f est bornée).

Soit $\sigma = (a_1, \dots, a_N)$ t.q.

$$a = a_1 < a_2 < \dots < a_N = b. \quad a_1 < b_1 < a_{N-1}$$

$$I_N^+(f) = \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) \sup_{[a_i, a_{i+1}]} f$$



$$I_N^-(f) = \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) \inf_{[a_i, a_{i+1}]} f$$

$$I_N(f) = \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i)$$



$$\text{Si } I = \sup_{\sigma} I_{\sigma}(f) = \inf_{\sigma} I_{\sigma}(f)$$

alors on dit que f est intégrable sur $(a; b)$. I est l'intégrale de f sur $(a; b)$. $\int_a^b f$

On a vu en L^1 que, si f est conti. par morceaux sur $[a; b]$, alors elle y est intégrable.

De plus, si f est conti. par morceaux, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_a^b f.$$

Résultats

inté. par parties
linéarité de l'inté.

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \sup_{t \in [a; b]} |f(t)|$$

Intégrales doubles

$AC(\mathbb{R}^2)$ borné.

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$

La théorie est compliquée car on veut intégrer sur des domaines généraux.

Soit $\sigma =$

$$I_{\sigma}^+(f) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) (x_i - x_{i-1})$$

Si σ

on dit

Cas simple



$$A = [a, b] \times [c, d]$$

$$\text{Soit } \sigma = \left((a_i, c_j), \begin{matrix} a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b \\ c = c_0 < c_1 < \dots < c_m = d \end{matrix} \right)$$

$$I_{\sigma}^+(f) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (a_i - a_{i-1})(c_j - c_{j-1}) \sup_{[a_{i-1}, a_i] \times [c_{j-1}, c_j]} f$$

$$\text{Si } \inf_{\sigma} I_{\sigma}^+(f) = \sup_{\sigma} I_{\sigma}^-(f)$$

on dit que f est intégrable sur A et cette valeur est l'intégrale double de f sur A notée

$$\iint_A f \quad \text{ou} \quad \iint_A f(x, y) dx dy$$

On peut refaire ceci sur des ens. A plus généraux à condition que la frontière de A est "d'aire nulle".

DA peut être recouverte par des rectangles dont l'aire totale est aussi petite que l'on veut.

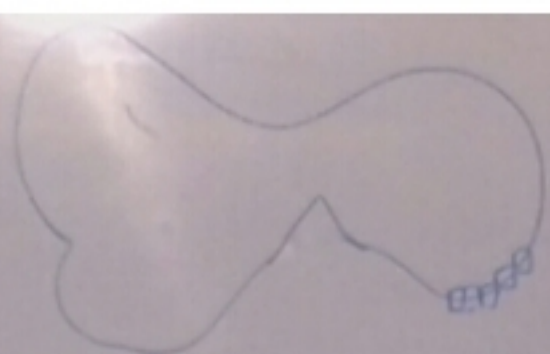
Dans

quar

Dans tr

que

Résultat



Dans ce cas, on dit que A est
quarrable.

Dans toute la suite, on ne considèrera
que des ens. quarrables.

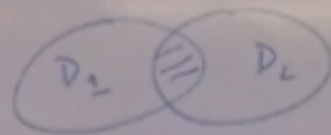
Résultat. Soit f est bornée sur un ens.
quarrable, f est intégrable.

Déf.: A quarrable.

$\iint_A 1$ c'est l'aire de A .
pet. est égale à 1 sur A

$$\left| \iint_A f \right| \leq \iint_A |f| \leq \sup_A |f| \times (\text{l'aire de } A)$$

"Charles"



D_1, D_2 quarr.

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f - \iint_{D_1 \cap D_2} f$$

Proposition: $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$
quarr. bornées.
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Th. de Fubini: Soit $\varphi_2, \varphi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
cont.

Alors

Soit $D = \{(x, y); x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$.

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.

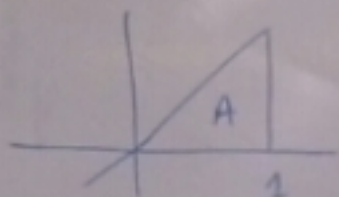
$$\iint_D f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\iint_A \lambda f + g = \lambda \iint_A f + \iint_A g$$

Si $f \leq g$ sur A alors $\iint_A f \leq \iint_A g$

Ex.

$$A = \{(x, y), x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$$



$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto xy \quad \left(\begin{array}{l} \text{bornée} \\ \text{car conti.} \\ \text{sur le compact } A \end{array} \right)$$

Par Fubini, $\iint_A f = \int_0^1 \left(\int_0^x xy dy \right) dx$.

$$= \int_0^1 \left(x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x \right) dx$$

$$= \int_0^1 x \left(\frac{x^2}{2} - 0 \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Variante du Th.

$$A = \{(x, y), y \in [a, b], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

$\leq y \leq x\}$

Variante du Th.

bornée
(car conti.
sur le compact A)

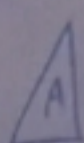
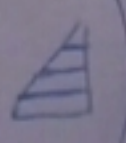
$$A = \{(x, y), y \in [a, b], \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée}$$

Alors

$$\iint_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Rq: Lorsque le domaine d'intégr. peut se mettre sous la forme de chaque th, on peut appl. en chois. celui qu'on veut.

C'est le cas si:  

Rq: On admet que l'aire de f sur A la même que celle de f sur $\tilde{A}$ et celle sur $\tilde{A}$

Changement de variables:

Soit $\Phi: D \rightarrow D'$ (ouvert bornés)

Un C^1 difféom (Φ est bi)

sur le net

Soit $f: D' \rightarrow \mathbb{R}$ bornée

Alors

$$\iint_D f(\Phi(x,y)) dx dy = \iint_{D'} f(x,y) / \det J_\Phi(x,y) dx dy$$

voir cours

Cas particulier:

$\Phi: D \rightarrow D'$

$(r,\theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$\Rightarrow$ diff. bi

$$J_\Phi(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r > 0$$

Si, sur D , $r > 0$ alors Φ est un C^1 difféomorphisme

App. air du disque D de centre $(0,0)$ et $r > 0$

$$\iint_D 1 dx dy = \iint_{D \setminus \{(0,0)\}} 1 dx dy$$

$\Phi: [0,R] \times [0,2\pi] \rightarrow D$ bi

$(r,\theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Φ est un C^1 diffé de $[0,R] \times [0,2\pi]$ sur $D \setminus \{(0,0)\}$

Changement de var ~~en~~ en polaire

$$\iint_{D \setminus \{(0,0)\}} 1 dx dy = \iint_{[0,R] \times [0,2\pi]} 1 r dr d\theta$$

$D \setminus \{(0,0)\}$

$0 < r \leq R$
 $0 \leq \theta < 2\pi$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r dr \right) d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R r dr = \boxed{\pi R^2}$$