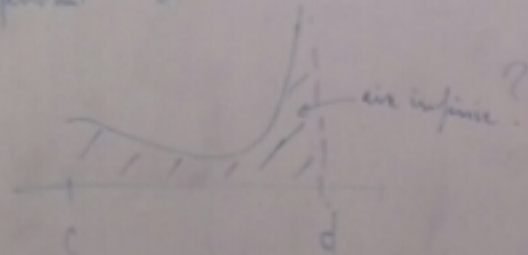


Intégrales généralisées

En L3 on a vu l'inté. (simple)
d'une fct. $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
sur $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

Si f est intégrable, elle était bornée.

Cependant si l'on considère



on peut se demander si l'aire
sous la courbe est infinie.

Traiter cette question est l'objet
de l'étude des intégrales généralisées.

On travaille dans le cadre suivant:

$$f:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}.$$

t.g. pour tout $a, b \in]c, d[$ avec $a < b$

f est intégrable (au sens usuel) sur $[a, b]$.

(on dit que f est localement intégrable
sur $]c, d[$)

Def: Soit $a \in]c, d[$

$$\text{Soit } F: [a, d[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

L'éventuelle limite de F en d
est appelée l'intégrale généralisée en d
de f sur $[a, d[$.

Si cette limite existe et est réelle

on dit que l'inté. gér. est convergente.

Sinon elle est divergente.

En analogie $G:]c, \eta] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^\eta f(t) dt$$

on définit de même la notion d'inté. gér. en c .

Exemple. $\alpha > 0, \alpha \neq 1$.

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$$

$$\text{Soit } F: [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt$$

$$\text{On a } F(x) = \int_1^x t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x$$

$$= \frac{x^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{e^{(1-\alpha)\ln x} - 1}{1-\alpha}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F$ existe dans $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1$

L'inté. gér. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente si $\alpha > 1$

Inté géné en 0

$$C(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_x^1$$

$$= \frac{1 - c^{(1-\alpha)\ln x}}{1-\alpha}$$

lim G existe dans R ssi $\alpha < 1$

L'inté géné $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ cv. ssi $\alpha < 1$.

On dit que l'inté généralisée $\int_c^d f(t)dt$
 cv. si pour un $a \in]c, d[$, $\int_a^d f(t)dt$
 et $\int_c^a f(t)dt$ cv. Dans ce cas
 $\int_c^d f(t)dt = \int_c^a f(t)dt + \int_a^d f(t)dt$.

Def.: Dans le cadre précédent,

Si $\int_a^d g(t)dt$ existe, on note
 $\int_a^d g(t)dt$ cette limite.

Si $\int_c^a g(t)dt$ existe, on note la limite $\int_c^a g(t)dt$.

On dit que l'inté généralisée $\int_c^d f(t)dt$
 cv. si pour un $a \in]c, d[$, $\int_a^d f(t)dt$
 et $\int_c^a f(t)dt$ cv. Dans ce cas
 $\int_c^d f(t)dt = \int_c^a f(t)dt + \int_a^d f(t)dt$.

Retour sur l'exemple :

Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge. En parti: $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ div.

Pour $\alpha < 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

Proposition

Si $\int_c^d$

Preuve:

Proposition 8.9 $[a, d[\rightarrow \mathbb{R}$
 loc. int.

Si $\int_a^d f$ et $\int_a^d g$ cv alors

$\int_a^d (f+g)$ cv. aussi et vaut $\int_a^d f + \int_a^d g$.

Preuve: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt$

Par hyp. $\lim_c F$ et $\lim_c G$ existent

Une par une, on a f, g cv
 dans $\mathbb{R}$ et on a $\lim_c F = \int_a^d f$ et $\lim_c G = \int_a^d g$.

Prop $f: [a, d[\rightarrow \mathbb{R}$
 loc. int.

$b \in]a, d[$

$\int_a^b f$ cv. ssi $\int_b^d f$ cv.

Preuve $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$

$F_b(x) = \int_b^x f(t)dt$

On a $b \in]a, d[$

$F_a(x) = \int_a^b f(t)dt + F_b(x)$

On a des résultats similaires pour les int. gér. en c.

absolument

Intégrales généralisées

absolument convergentes.

Prop: Soit $f:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^+$ || $a \in]c, d[$

Alors $\int_a^d f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (ds $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$)

Preuve $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est ?

En effet, $x \leq y$, $F(y) = \int_a^y f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt$
 $\geq F(x)$

Par le l.c., $\lim_{x \rightarrow d} F(x)$ existe et vaut $\sup F \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$x \leq y$
 $\int_x^y f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^y f(t)dt$
 ≥ 0
 $F(x) \geq F(y)$

Rq: Si

Th: So

Si $\int_a^c |f|$

Preuve: F

Critère de

$\forall \varepsilon > 0$,
 Ssi $\lim_c$ exi

Rq : Si $f \geq 0$, on exprime la cv.
de $\int_a^d f$ par " $\int_a^d f < +\infty$ ".

Sont c.v.

$$|F(x) - F(y)| =$$

$\leq$

Th. : Soit $f: [a, c[\rightarrow \mathbb{R}$ loca. inté.

Si $\int_a^c |f|$ cv. alors $\int_a^c f$ cv.

Par le critère de

et l'hyp

Preuve : $F(x) = \int_a^x f(t) dt. : c < \infty.$

x, y

Critère de Cauchy. (admis)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x, y \in]c-\delta, c[\Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$

Par $x, y \in$

ssi $\lim g$ existe dans $\mathbb{R}$.

Sont c.v.

Par

le critère de Cauchy appl. à $\int_a^x f$
on récapitule la cv. de $\int_a^d f$. $\square$

On a un résultat similaire
pour $\int_c^a f$

Déf. : $\int_a^d f$ (resp. $\int_c^a f$)

est semi-convergente si
elle converge et si $\int_a^d |f|$

(resp. $\int_c^a |f|$) diverge.

Si $\int_a^d |f|$ (resp. $\int_c^a |f|$) cv. on dit que
 $\int_a^d f$ (resp. $\int_c^a f$) est abs. convergente.

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_y^x f \right|$$

$$\leq \left| \int_y^x |f| \right|$$

Par le critère de Cauchy appliqué à $\int_a^x |f|$
et l'hyp. Il existe $\delta > 0$ t.s.

$$x, y \in]d-\delta, d[\Rightarrow \underbrace{\left| \int_a^x |f| - \int_a^y |f| \right|}_{\left| \int_y^x |f| \right|} < \varepsilon$$

Par $x, y \in]d-\delta, d[$,

$$|F(x) - F(y)| \leq \left| \int_y^x |f| \right| < \varepsilon.$$

Prop. pour des funct.

positives

De plus,

Prop.: Soit $f, g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}^+$ loc. inte.

t.q. $\forall x \in]c, d[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

Alors, pour $a \in]c, d[$,

$$\int_a^d f \text{ div.} \Rightarrow \int_a^d g \text{ div.}$$

$$\left(\int_c^a f \text{ div.} \Rightarrow \int_c^a g \text{ div.} \right)$$

$$\int_a^d g \text{ cv.} \Rightarrow \int_a^d f \text{ cv.}$$

$$\left(\int_c^a g \text{ cv.} \Rightarrow \int_c^a f \text{ cv.} \right)$$

De plus,

$$\int_c^d f = +\infty \text{ si pour un } a \in]c, d[, \int_a^d f \text{ ou } \int_c^a f \text{ div.}$$

Prop.: Soit $f, g:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$.

t.q. $\forall x \in]c, d[, |f(x)| \leq g(x)$ (g positive)

$$\int_c^a g < +\infty \Rightarrow \int_c^a f \text{ cv. (abs.)}$$

$$(\text{resp. } \int_a^d g)$$

Déf.: on dit que f et g sont équivalentes
près de b si g ne s'annule pas près de b
(sauf peut-être en b) et $\lim_{x \rightarrow b, x \neq b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note $f \sim_b g$

Prop: $f, g:]c; d[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g \geq 0$

Si $f \sim_d g$ alors $\left(\int_a^d f \text{ cv} \text{ssi} \int_a^d g \text{ cv.} \right)$

Si $f = O(g)$ (grand $\circ$) (f est plus petite que g)

$$\int_a^d g \text{ cv.} \Rightarrow \int_a^d f \text{ cv.}$$

Exemple: Étude de
l'inté. est géné. en $+\infty$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \left(\begin{array}{l} \sin t \text{ est} \\ \text{loca inté} \\ \text{sur } [1; +\infty[\end{array} \right)$$

↪ positive

$$\text{Pour } t \geq 1, \quad \left| \frac{\sin t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

Or on a vu que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ cv. (car } 2 > 1)$$

Par une prop. du cours, $\int_1^t \frac{dt}{t^2}$ est abs. cv.

Par le cours, $\int_0^3 \frac{\cos t}{t} dt$ diverge.

Autre exemple :

$$\int_0^3 \frac{\cos t}{t} dt ?$$

$$\frac{\cos t}{t} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0 \left(\frac{\cos t}{t} = \frac{\cos t}{\frac{1}{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 1 \right)$$

$$\int_0^3 \frac{dt}{t} ? \quad \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^3 \frac{dt}{t} ?$$

$$\Rightarrow \int_x^3 \frac{dt}{t} = \left[\ln t \right]_x^3 = \ln 3 - \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty.$$

Donc $\int_0^3 \frac{dt}{t}$ div.

Fonction définie par une intégrale :

Prop. Soit $f: I \xrightarrow{\text{int.}} \mathbb{R}$ conti.

Soit $x_0 \in I$ et $F: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt.$

F est dérivable et

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Preuve : - -