Fonct déf par une intégrale.

Primitive

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $a, x_0 \in I$ — int. de $\mathbb{R}$

Soit $F : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) déf par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Si f est cont en x_0 alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Preuve : On a $hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt$.

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt - h f(x_0) \right|$$

$$= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\,dt \right| \leq \max_{\substack{t \text{ compris} \\ x_0 \text{ et } x_0+h}} |f(t) - f(x_0)| \times \frac{|h|}{|h|}$$

Soit $\varepsilon > 0$

Comme f est cont en x_0 il existe $\delta > 0$;

$t \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Pour $|h| < \delta$, on a

$$\sup_{\substack{t \text{ compris} \\ x_0 \text{ et } x_0+h}} |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

D'où $\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$.

D'où F est dérivable en x_0

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Th. : Soit $f : I \times [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

inté. de $\mathbb{R}$

tq. pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ est bien déf. ($\forall x$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable)

1. Si f est conti. (des deux var) alors F est conti.

2. Si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont conti. alors F est dérivable et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

3. Si $c, d \in I$,

$$\int_c^d \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \int_c^d f(x,t)\,dt \quad \text{(Fubini)}$$

__Preuve__ : on admet le résultat suivant.

Si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (K compact de $\mathbb{R}^2$) est conti., elle est uniformément conti. :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (M, M') \in K,$

$$\|M - M'\| < \delta \Rightarrow |f(M) - f(M')| < \varepsilon. \ (*)$$

1. $|h| \leq 1$. $|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_a^b f(x+h;t) - f(x;t)\,dt \right|$

$$\leq \int_a^b |f(x+h;t) - f(x;t)|\,dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est unif. conti. sur $[x-1;x+1] \times [a;b]$, il existe $\delta > 0$ tel qu'on ait $(*)$ avec $\varepsilon \leftarrow \frac{\varepsilon}{b-a}$: pour tout $t \in [a;b]$,

$$|h| = \sqrt{(x+h-x)^2 + (t-t)^2} < \delta \Rightarrow |f(x+h;t) - f(x;t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

qu'on ait $|f|$ avec $\delta \to \frac{\varepsilon}{b-a}$ pour tout $t \in [a;b]$,

$$|h| = \sqrt{(x+h-x)^2 + (t-t)^2} < \delta \Longrightarrow \left| f(x+h,t) - f(x,t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Pour $|h| < \delta$,

$$\left| F(x+h) - F(x) \right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} \, dt = \varepsilon.$$

Donc F est conti. en x.

2 et 3 : admises.

Exemple : $F(x) = \int_0^1 e^{xt^2} \, dt$.

$f(x;t) = e^{xt^2}$. On a $f = e^{P_1 P_2^2}$ où $P_1 : (x;t) \mapsto x$
$P_2 : (x;t) \mapsto t$.

Comme P_1 et P_2 sont C^2, f est C^2.

f est conti., $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est conti.

Donc F est conti. et m. dérivable et

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \int_a^b t^2 e^{xt^2} \, dt$

Rq. : on ne connaît pas de primitive de $t \longmapsto e^{xt^2}$ (si $x \neq 0$).

$p_1 : (x;t) \longmapsto x$

$p_2 : (x;t) \longmapsto t$.

Fonct. déf. par une intég. généralisée.

Soit $f : I \times]c;d[\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). (intervalle)

tq. pour tout $x \in I$,

$f(x;\cdot)$ est loc. intég. sur $]c;d[$

Pour $x \in I$, on s'intéresse

à $F(x) = \int_c^d f(x;t)\,dt$ (*)

qui est une intég. généralisée.

Th. Dans le cadre précédent, on suppose de plus que f est dominée par une fct g intégrable sur $]c;d[$:

tq $\int_c^d g(t)\,dt < \infty$

Il existe $g :]c;d[\longrightarrow \mathbb{R}^+$

et $\forall x \in I$, $\forall t \in]c;d[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

Alors Si f est conti. sur $I \times]c;d[$, F donnée par (*) est bien déf. et est conti. sur I.

Si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont conti. et s'il existe $G :]c;d[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ intég. sur $]c;d[$, $\int_c^d G < \infty$

tq $\forall (x,t) \in I \times]c;d[$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq G(t)$

alors F est dérivable sur I et

$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x;t)\,dt$.

Ce théorème est admis. C'est une conséquence du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Ex : $F(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt$

pour $x > 1$.

$f(x;t) = e^{-xt^2}$. Elle est C^1 sur $]1;+\infty[\times[1;+\infty[$

Elle est loc. intég. en t.

Pour $x > 1$ et $t \geq 1$ $\quad e^{-xt^2} \leq e^{-t^2} \leq e^{-t} = g(t)$

$\left(xt^2 \geq t^2,\ -xt^2 \leq -t^2,\ t \geq 1 \Rightarrow t^2 \geq t \right)$

$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt < +\infty$?

$\int_1^T e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^T = e^{-1} - e^{-T} \xrightarrow[T\to+\infty]{} e^{-1}$

Donc $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ cv.

Par le Th., F est bien définie et est conti. sur $]1;+\infty[$.

De plus, $x > 1,\ t \geq 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;t) = -t^2 e^{-xt^2}$.

Pour $x > 1$ et $t \geq 1$,

$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x;t)\right| \leq t^2 e^{-t} = t^2 e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}$.

On admet que $h(t) = t^2 e^{-\frac{t}{2}}$ est bornée par $C>0$ sur $[1;+\infty[$.

Donc $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x;t)\right| \leq G(t) = Ce^{-\frac{t}{2}}$.

De plus, $\int_1^{+\infty} G(t)$ ...

$\left(\int_1^T G(t)\,dt = C\left[-2e^{-t/2}\right. \ldots \xrightarrow[T\to+\infty]{} d \in \ldots \right)$

De plus, $\int_1^{+\infty} G(t)\,dt < \infty$

$$\left(\int_1^T G(t)\,dt = C \left[-2e^{-t/2} \right]_1^T \; \ldots \; \xrightarrow[T \to +\infty]{} d \in \mathbb{R} \right).$$

Par la 2^{e} partie du Th.,

F est dérivable sur $]1;+\infty[$ et

$$F'(x) = -\int_1^{+\infty} t^2 e^{-xt^2}\,dt.$$

bornée par $C>0$

Fin

Chapitre 3 : Séries

Rappel sur les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$(u_n)_n$ une suite complexe

Elle converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

module

$(u_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon.$$

$(u_n)_n$ cv. $\Rightarrow$ (u_n) est de Cauchy.

Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets, $(u_n)_n$ de Cauchy $\Rightarrow$ $(u_n)_n$ CV.

//Dans une suite de Cauchy, les termes restent proches les uns des autres.

Résultats :

- somme, produit, quotient de suites convergentes. (encore valable ds $\mathbb{C}$)
- suites réelles. les suites monotones ont tjs une limite.

Cas particulier

suites géométriques $(r^n)_n$ avec $r \in \mathbb{C}$

On peut montrer que

Si $|r| < 1$, $r^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Si $|r| > 1$, $(r^n)_n$ ne cv pas (on dit qu'elle diverge)

Si $|r| = 1$ et $r \neq 1$, $(r^n)_n$ diverge.

De plus, si $r \neq 1$,

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{r^{N+1} - r^0}{r - 1}$$

Déf : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(S_n)_n$ déf par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

$(S_n)_n$ est la série associée à $(u_n)_n$, on la note $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv si $(S_n)_n$ cv

Dans ce cas, on note $\lim S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ($\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Si $(S_n)_n$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge

<u>Ex</u> : $u_n = r^n$ avec $|r|<1$.

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv ?

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{1}{1-r} + \frac{r}{r-1}\times \underbrace{r^n}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}$$

car $|r|<1$.

Donc $(S_n)_n$ cv. vers $\frac{1}{1-r}$.

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Si $r\in\mathbb{R}$ avec $r>1$

<u>Rq</u>.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \longrightarrow +\infty$$

car $\lim r^n = +\infty$.

$\lim S_n$ existe mais (S_n) diverge

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ existe et vaut $+\infty$.

<u>Rq</u> : on peut voir toute suite comme une série.

Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite.

Soit $(u_n)_n$ déf. par $u_0 = v_0$

$u_n = v_n - v_{n-1}$ pour $n>0$.

$$(S_n) = \sum_{k=0}^{n} u_k \overset{\text{série}}{=} v_n .$$

$S_n = \sum_{k=0}$ (v

$= v_n - v$

...

$= v_n$

<u>Prop</u> : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}}$

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ (

$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n +$

<u>Preuve</u> : Th. de

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_k - v_{k-1})$$

$$= v_n - \cancel{v_{n-1}} + \cancel{v_{n-1}} - \cancel{v_{n-2}} + \dots$$

$$\dots + v_2 - \cancel{v_1} + \cancel{v_1} - v_0 + v_0 .$$

$$= v_n .$$

Prop. Soit (u_n) et (v_n) ...

$\exists n_0 \; ; \; n \geq n_0 \Rightarrow u_n = v_n$.

Alors

$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv. ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ cv.

(on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nb. fini de termes de la suite la définissant).

Prop. : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ cv et $\lambda \in \mathbb{C}$

alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + \lambda v_n)$ cv. et

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n .$$

Preuve : Th. de LS sur les limites de suites.

Prop. : Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Réciproque fausse : on verra que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$