CY Cergy Paris Université
Département de Mathématiques
L3 Maths - S5
2024/2025

Analyse Complexe

Cours basé sur le cours d'analyse complexe de Laurent Bruneau (2022/2023).

CONTENTS

CHAPTER 1

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

Ce cours a pour objet principal les fonctions complexes d'une variable complexe, c'est-à-dire les fonctions "de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$". Plus précisément, on considèrera des fonctions définies sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Tout comme pour les fonctions d'une variable réelle, on s'intéressera aux notions de fonction continue mais surtout "$\mathbb{C}$-dérivable", ainsi qu'à leurs propriétés. On reviendra également sur la notion de séries entières (d'une variable complexe) qui joueront un rôle important. On s'intéressera enfin aux notions de primitive et d'intégrale d'une fonction le long d'un chemin inclus dans son ensemble de définition.

1.1 Topologie et convergence dans $\mathbb{C}$.

Que ce soit pour parler de continuité, de $\mathbb{C}$-dérivabilité ou de convergence de série, la notion de limite est présente. Egalement la "nature" de l'ensemble de définition peut être importante. C'est déjà le cas pour les fonctions réelles d'une variable réelle. Par exemple les théorèmes des valeurs intermédiaires et des accroissements finis ne sont vrais que si l'ensemble de définition est un *intervalle*. Egalement, pour étudier les extrema d'une telle fonction, si elle est continue sur un segment (plus généralement un *compact*) alors elle admet un minimum et un maximum. Inversement si elle est dérivable alors en un extremum sa dérivée s'annule à condition que l'ensemble de définition soit un *ouvert*. Dans cette section on commence par rapidement présenter quelques prérequis indispensables pour la suite. C'est l'adaptation à $\mathbb{C}$ de ce que vous avez vu dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Rappels sur $\mathbb{C}$, module.

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est défini comme le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que l'on munit d'une multiplication interne : pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x'; y') \in \mathbb{R}^2$, le produit de $(x; y)$ par $(x'; y')$ est défini par

$$(x; y) \cdot (x'; y') \;=\; (xx' - yy'; xy' + x'y)\,.$$

Ce produit est associatif, commutatif, distributif sur l'addition. Le vecteur $(1;0)$ est l'élément neutre de cette multiplication. Tout complexe non nul a un inverse. On dit que l'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps. On note par 1 le vecteur $(1;0)$ et par i le vecteur $(0;1)$. L'espace $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et la base $(1;i)$ de $\mathbb{C}$ est appelée base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On remarque que $1^2 := 1 \cdot 1 = 1$ et $i^2 := i \cdot i = -1$, où $-1 = (-1;0)$. Comme $\mathbb{C}$ est un corps, on peut aussi voir $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, dont le vecteur 1 est une base.
Une application $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{R}$-*linéaire* si elle est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même. On dit qu'elle est $\mathbb{C}$-*linéaire* si elle est une application linéaire du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même. On va voir qu'une application $\mathbb{C}$-linéaire est automatiquement $\mathbb{R}$-linéaire. En revanche, une application $\mathbb{R}$-linéaire peut ne pas être $\mathbb{C}$-linéaire.

Proposition 1.1. *Soit* $L : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. *Si* L *est* $\mathbb{C}$*-linéaire, elle est aussi* $\mathbb{R}$*-linéaire.*
2. *L'application* L *est* $\mathbb{C}$*-linéaire si et seulement s'il existe un* $w \in \mathbb{C}$ *tel que, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $L(z) = wz$.
3. *On suppose que* L *est* $\mathbb{R}$*-linéaire. L'application* L *est* $\mathbb{C}$*-linéaire si et seulement si sa matrice dans la base canonique* $(1;i)$ *du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$ *est du type*
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$
avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. *Dans ce cas, le* w *du 2 est* $a + ib$.

Démonstration. Voir TD. $\square$

L'application $\mathrm{Id} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\mathrm{Id}(z) = z$ est $\mathbb{C}$-linéaire (c'est la multiplication par 1). La conjugaison complexe $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $\bar{\cdot}(z) = \overline{z}$, le conjugué de z, est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.
On a vu en L2 que l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \ni (x;y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ est une norme (la norme euclidienne). Cette norme "dérive" du produit scalaire $\langle\cdot;\,\cdot\rangle : (\mathbb{R}^2)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donné par
$$\langle\cdot;\,\cdot\rangle\big((x;y);(x';y')\big) \;:=\; \big\langle(x;y);\,(x';y')\big\rangle \;:=\; xx' + yy'$$
puisque, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x;y)\| = \sqrt{\langle(x;y);(x;y)\rangle}$.
Puisque $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, cette norme est une norme sur $\mathbb{C}$ que l'on note $|\cdot|$ et que l'on appelle "module". Avec la même notation, le produit scalaire précédent agit sur $\mathbb{C}^2$. On remarque que
$$\forall\,(w;z) \in \mathbb{C}^2, \quad |z| \;=\; \sqrt{z\cdot\overline{z}}, \quad |wz| \;=\; |w|\,|z|, \quad \langle w;\,z\rangle \;=\; \mathrm{Re}\big(w\cdot\overline{z}\big) \;=\; \mathrm{Re}\big(\overline{w}\cdot z\big) \;=\; \langle z;\,w\rangle,$$
où $\mathrm{Re}(a)$ désigne la partie réelle du nombre complexe a.
Comme le module est une norme sur $\mathbb{C}$, il vérifie l'inégalité triangulaire suivante :
$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2, \quad |z+z'| \;\le\; |z| + |z'|.$$
On vérifie (cf. TD) que cette propriété est équivalente à
$$\forall\,(z;z') \in \mathbb{C}^2, \quad \big||z| - |z'|\big| \;\le\; |z - z'|.$$
Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, nous utiliserons la topologie (et donc la notion de convergence) des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés vue en L2.

1.1.2 Disques, ouverts et fermés.

Comme $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension 2, les boules sont appelées des disques. On rappelle ici des notions et des propriétés de base vues en L2.

Notation. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r \geq 0$. On note $D(z_0; r[= \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r. On note également $D(z_0; r] = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| \leq r\}$, resp. $C(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| = r\}$, le disque fermé, resp. le cercle, de centre z_0 et de rayon r.

Lorsque $r = 0$, $D(z_0; r[$ est vide et $D(z_0; r] = C(z_0; r) = \{z_0\}$. On utilisera surtout ces objets quand $r > 0$.

Définition 1.1. *Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit borné s'il existe $M > 0$ tel que $|z| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$, i.e. tel que $\Omega \subset D(0; M]$.*

Exercice 1.1. *Montrer Ω est borné ssi il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tel que $\Omega \subset D(z_0; r[$.*

Définition 1.2. *$\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit ouvert si, pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $D(z; r[\subset \Omega$.*

Définition 1.3. *$F \subset \mathbb{C}$ est dit fermé si son complémentaire $\Omega = F^c = \mathbb{C} \setminus F$ est ouvert.*

Remarque 1.1. *Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés. On admet que ce sont les seuls ensembles de $\mathbb{C}$ qui vérifient cette propriété. (On peut cependant montrer ce résultat en exploitant la preuve de la proposition 3.3).*

Exercice 1.2. *Montrer que, pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$, le disque $D(z_0; r[$ est un ouvert et le disque $D(z_0; r]$ est un fermé.*

Proposition 1.2. *Réunions et intersections.*

1. *Toute réunion d'ensembles ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ouvert.*
2. *Toute intersection d'ensembles fermés est un fermé et toute réunion finie d'ensembles fermés est un fermé.*

Définition-Proposition 1.4. *Soit $A \subset \mathbb{C}$.*

1. *Il existe un plus grand ouvert inclus dans A. On l'appelle intérieur de A, noté $\mathring{A}$. De plus $\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \exists r > 0,\ D(z; r[\subset A\}$ et c'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*
2. *Il existe un plus petit fermé contenant A. On l'appelle adhérence de A, notée $\overline{A}$. De plus $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \forall r > 0,\ D(z; r[\cap A \neq \emptyset\}$ et c'est l'intersection de tous les fermés contenant A.*

Définition 1.5. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. On dit que*

1. *$z \in A$ est un point isolé de A s'il existe $r > 0$ tel que $D(z; r[\cap A = \{z\}$.*
2. *A est un ensemble discret si tous ses points sont isolés.*
3. *$z \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de A si, pour tout $r > 0$, $(D(z; r[\setminus\{z\}) \cap A \neq \emptyset$.*

On considère l'ensemble vide comme discret.

Remarque 1.2. $z \in \mathbb{C}$ *est un point d'accumulation de* A *si et seulement si* $z \in \overline{A \setminus \{z\}}$.

Exemple 1.1. $A = \{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$ *est discret et admet* 0 *comme unique point d'accumulation.*

Remarque 1.3. *Soit* Ω *un ouvert non-vide. Tout* $z \in \Omega$ *est un point d'accumulation de* Ω *(cf. TD).*

1.1.3 Convergence de suites et de séries.

Là encore, on utilise la notion de convergence dans un espace normé, notion vue en L2.

Définition 1.6. *Soit* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On dit que* $(z_n)_n$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$, *noté* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$, *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

Lorsqu'elle existe la limite est unique.

Remarque 1.4. *La suite* $(z_n)_n$ *converge (dans* $\mathbb{C}$*) vers* ℓ *si et seulement si les suites* $(\mathrm{Re}(z_n))_n$ *et* $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ *convergent (dans* $\mathbb{R}$*) respectivement vers* $\mathrm{Re}(\ell)$ *et* $\mathrm{Im}(\ell)$. *Cela découle de l'encadrement*

$$\max(|\mathrm{Re}(z)|;\, |\mathrm{Im}(z)|) \ \leq\ |z| \ \leq\ |\mathrm{Re}(z)| \ +\ |\mathrm{Im}(z)|\,.$$

Proposition 1.3. *Soient* $(z_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$. *On suppose* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = \ell'$. *Alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha z_n + w_n = \alpha\ell + \ell'$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = \ell\ell'$. *Si de plus* $w_n \neq 0$ *pour tout* n *et* $\ell' \neq 0$ *alors* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Démonstration. Ces résultats ont été démontrés en L1. □

Les trois résultats suivants sont démontrés en L2.

Proposition 1.4. *Soit* $F \subset \mathbb{C}$. *L'ensemble* F *est fermé si et seulement si, pour toute suite* $(z_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* F *qui converge (dans* $\mathbb{C}$*), sa limite appartient à* F.

Proposition 1.5. *Soit* $A \subset \mathbb{C}$ *et* $z \in \mathbb{C}$. $z \in \overline{A}$ *ssi il existe* $(z_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Corollaire 1.1. $z \in \mathbb{C}$ *est un point d'accumulation de* A *ssi il existe* $(z_n)_n \in (A \setminus \{z\})^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

Définition 1.7. *Soit* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n \ := \ \sum_{k=0}^{n} z_k$$

est la somme partielle d'ordre n *de* $(z_n)_n$. *On dit que la série* $\sum z_n$ *converge si la suite* $(Z_n)_n$ *des sommes partielles converge. Dans ce cas, cette limite, appelée somme de la série* $\sum z_n$, *est notée par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n\,.$$

Remarque 1.5. *En utilisant* $\mathrm{Re}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$, $\mathrm{Im}(Z_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(z_k)$ *ainsi que la Remarque 1.4 on vérifie que la série* $\sum z_n$ *converge si et seulement si les deux séries* $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ *convergent. Dans ce cas, on a :* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(z_n)$.

Dans certaines situations on n'a pas accès à la limite, c'est souvent le cas lorsqu'on étudie la convergence des séries, et la notion de suite de Cauchy joue alors un rôle important.

Définition 1.8. *Soit* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On dit que* $(z_n)_n$ *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}; \ \forall n, m \geq N, \ |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1. *Soit* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Alors la suite* $(z_n)_n$ *converge si et seulement si elle est de Cauchy. On dit que* $\mathbb{C}$ *est complet.*

Démonstration. Voir L1. □

Une importante conséquence de cette propriété est le résultat suivant.

Proposition 1.6. *Si* $\sum |z_n|$ *converge alors* $\sum z_n$ *converge.*

Démonstration. Si $\sum |z_n|$ converge alors la suite réelle $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_k|\right)_n$ converge donc est de Cauchy dans $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}; \ \forall n \geq m \geq N, \ \left| \sum_{k=0}^{n} |z_k| - \sum_{k=0}^{m} |z_k| \right| = \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on prend N comme ci-dessus. Pour tous $n \geq m \geq N$, on a

$$|Z_n - Z_m| = \left| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{m} z_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

La suite des sommes partielles $(Z_n)_n$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{C}$. D'après le théorème 1.1, elle converge, i.e. $\sum z_n$ converge.

1.1.4 Compacité.

De nouveau, on reprend des résultats de L1 et L2.

Définition 1.9. *Une sous-suite, ou suite extraite, d'une suite* $(z_n)_n$ *est une suite* $(z_{\varphi(n)})_n$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est strictement croissante.*

Proposition 1.7. *Si une suite* $(z_n)_n$ *converge vers un* $\ell \in \mathbb{C}$ *alors toute sous-suite de* $(z_n)_n$ *converge aussi vers* ℓ.

Définition 1.10. *On dit que* $\ell \in \mathbb{C}$ *est une valeur d'adhérence de la suite* $(z_n)_n$ *s'il existe une sous-suite de* $(z_n)_n$ *qui converge vers* ℓ.

Définition 1.11. *Un ensemble $K \subset \mathbb{C}$ est dit compact si toute suite $(z_n)_n$ d'éléments de K admet une sous-suite qui converge dans K. Autrement dit, quelle que soit $(z_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\ell \in K$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\varphi(n)} = \ell$.*

Proposition 1.8. *$K \subset \mathbb{C}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Corollaire 1.2. *Soit $A \subset \mathbb{C}$. A est borné si et seulement si $\overline{A}$ est compact.*

Proposition 1.9. *Soit K une compact et F un fermé. La distance de K à F, définie par*

$$d(K;F) \ := \ \inf\left\{|w\ -\ z|\,;\ w \in K\,,\ z \in F\right\}$$

est atteinte. De plus, si $K \cap F = \emptyset$, alors $d(K;F) > 0$ et l'ensemble

$$K' \ := \ \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\, w \in K\,;\ |z - w| \ \leq\ d(K;F)/2\right\}$$

est un compact vérifiant $K' \cap F = \emptyset$.

Démonstration. Voir TD. □

1.1.5 Connexité par arcs

La notion d'ensemble connexe par arcs, voir la Définition 1.14 ci-dessous, est assez intuitive. Essentiellement un ensemble est connexe par arcs s'il est "constitué d'un seul morceau". On peut voir cette notion comme l'analogue dans $\mathbb{C}$ de celle d'intervalle dans $\mathbb{R}$. On a besoin pour la définir de la notion de fonction continue d'un segment $[a;b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ que l'on retrouvera plus loin quand on parlera d'intégrale le long d'un chemin.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$. Une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donc une fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. D'après le cours de L2, la continuité de f est définie par

Définition 1.12. *Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue en $t_0 \in [a;b]$ si*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0;\ \forall\, t \in [a;b], \quad |t - t_0| < \delta \ \Longrightarrow\ |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur $[a;b]$ si elle est continue en tout $t_0 \in [a;b]$.

Remarque 1.6. *L'image de f est l'ensemble $\{f(t)\,;\, t \in [a,b]\}$. C'est une courbe paramétrée dans $\mathbb{C}$ et l'idée de la continuité est que si f est continue alors cette courbe est en un seul morceau.*

Exemple 1.2. *Courbes paramétrés.*

1. *Le segment d'extrêmités z_1 et z_2, noté $[z_1;z_2]$, est l'image de la fonction continue $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$.*

2. *Le cercle $C(z_0;r)$ de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r \geq 0$ est l'image de la fonction continue $\gamma_{z_0;r} : [0;2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ (cf. corollaire 2.4).*

Définition 1.13. *Soit $(a_1; b_1; a_2; b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$. Soit $f_1 : [a_1; b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : [a_2; b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ des fonctions continues telles que $f_1(b_1) = f_2(a_2)$ (les courbes se "recollent" en ce point). L'application continue $f : [a_1; b_1 + b_2 - a_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) & \text{si } t \in [a_1; b_1]\,, \\ f(t) &= f_2(t - b_1 + a_2) & \text{si } t \in [b_1; b_1 + b_2 - a_2]\,, \end{aligned}$$

est la concaténation, notée $f_1 \overset{\circ}{+} f_2$, de f_1 et f_2.

Proposition 1.10. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit $a = t_0 < \cdots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}^*$, une subdivision de $[a; b]$. Alors γ est la concaténation de ses restrictions aux intervalles $[t_0; t_1]$, ..., $[t_{n-1}; t_n]$, i.e.*

$$\gamma \;=\; (\overset{\circ}{+})_{j=0}^{n-1}\, \gamma_{|[t_j;t_{j+1}]} \;=\; \gamma_{|[t_0;t_1]} \overset{\circ}{+} \cdots \overset{\circ}{+} \gamma_{|[t_{n-1};t_n]}\,.$$

Démonstration. Voir TD. □

Définition 1.14. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que Ω est connexe par arcs si, pour tous points $z_1, z_2 \in \Omega$, il existe un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ et une application continue $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$ et, pour tout $t \in [a; b]$, on a $\gamma(t) \in \Omega$, autrement dit si n'importe quels points z_1, z_2 dans Ω peuvent être reliés par une courbe continue qui est incluse dans Ω.*

Remarque 1.7. *Dans la définition de connexe par arcs, on suppose souvent que $[a; b] = [0; 1]$. Ce n'est pas restrictif. En effet, si $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est comme dans la définition ci-dessus alors la fonction $\tilde{\gamma} : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tilde{\gamma}(u) = \gamma(a + u(b - a))$ est continue et vérifie $\tilde{\gamma}(0) = z_1$, $\tilde{\gamma}(1) = z_2$ et $\tilde{\gamma}(u) \in \Omega$ pour tout $u \in [0; 1]$.*

Définition 1.15. *On appelle* domaine *de $\mathbb{C}$ tout sous-ensemble ouvert, non vide et connexe par arcs de $\mathbb{C}$.*

On rencontre parfois des notions un peu plus fortes que cette dernière.

Définition 1.16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ non-vide. On dit que*

1. *Ω est convexe si, pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$, on a $[z_1; z_2] \subset \Omega$.*
2. *Ω est étoilé par rapport à $z_0 \in \Omega$ si, pour tout $z \in \Omega$, on a $[z_0; z] \subset \Omega$.*
3. *Ω est étoilé s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0.*

Proposition 1.11. *Un ensemble convexe est étoilé par rapport à chacun de ses points. Un ensemble étoilé est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit Ω un convexe de $\mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0; z] \subset \Omega$ car Ω est convexe, donc Ω est étoilé par rapport à z_0.
Soit Ω une partie de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rapport à z_0. Soit $(z_1; z_2) \in \Omega^2$. Soit γ la concaténation des courbes paramétrées continues $\psi_{z_1;z_0}$ et $\psi_{z_0;z_2}$ (cf. exemples 1.2). L'application γ est continue d'extrémités z_1 et z_2. Comme Ω est étoilé par rapport à z_0, on a $[z_0; z_1] \subset \Omega$ et $[z_0; z_2] \subset \Omega$ donc les courbes $\psi_{z_1;z_0}$ et $\psi_{z_0;z_2}$ sont à valeurs dans Ω et γ aussi. Ceci étant vrai pour tout $(z_1; z_2) \in \Omega^2$, Ω est connexe par arcs. □

Remarque 1.8. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r]$ sont convexes (cf. TD). Comme $D(z_0; r[$ est un ouvert (cf. exercice 1.2) et est convexe donc connexe par arcs (cf. proposition 1.11), $D(z_0; r[$ est un domaine de $\mathbb{C}$.*

1.2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, on s'intéresser à la régularité de fonctions d'une partie de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ mais aussi de fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On utilisera le fait que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1.

1.2.1 Fonctions d'une variable complexe.

On considère d'abord des fonctions d'une variable complexe à valeurs dans $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on se retrouve dans le cadre d'un cours de L2.

Définition 1.17. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que f tend vers ℓ lorsque z tend vers a, noté $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \ell$, si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ \forall z \in \Omega,\ |z-a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon.$$

Remarque 1.9. *La condition $a \in \overline{\Omega}$ assure que quelque soit $\delta > 0$ l'ensemble $\{z \in \Omega\,;\, |z-a| < \delta\}$ n'est pas vide. C'est cela qui permet de garantir l'unicité de la limite, si elle existe.*

Proposition 1.12. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \overline{\Omega}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \ell$ si et seulement si*

$$\forall (z_n)_n \in \Omega^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to\infty} z_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \ell.$$

On a aussi, bien entendu, toutes les propriétés usuelles sur les limites (somme, produit, quotient lorsque le dénominateur ne s'annule pas et a une limite non nulle, composée lorsque c'est possible). Tout cela peut se montrer en reprenant les preuves vues en L1 sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut aussi déduire certaines de ces propriétés du cours de fonctions de plusieurs variables réelles de L2.

Définition 1.18. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. La fonction f est continue en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. Elle est continue sur Ω si elle est continue en tout $z_0 \in \Omega$.*

Cette définition coïncide avec celle de la continuité pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. En utilisant par exemple la Proposition 1.12, on montre les propriétés usuelles suivantes.

Proposition 1.13. *Opérations.*

1. *Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont continues. Si de plus g ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.*
2. *Soit $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est continue sur Ω_f.*

Exemple 1.3. *Les fonctions $z \mapsto c$ (pour un $c \in \mathbb{C}$), $z \mapsto z$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|$ sont continues car elles sont 1-lipschitziennes (cf. L2). Par les opérations, les fonctions polynômes sont aussi continues. Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$. On rappelle que, si Q est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, il possède au plus n racines, i.e. l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$ a au plus n éléments.*

Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les principaux théorèmes vus en L1 concernant les fonctions continues sont : le théorème des valeurs intermédiaires et le fait que toute fonction continue sur un segment soit bornée et atteigne ses bornes, i.e. elle admet un minimum et un maximum. Ici cela ne peut plus avoir de sens puisqu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$: si z, z' sont deux nombres complexes arbitraires que signifie $z \leq z'$? On a par contre la généralisation suivante du second résultat.

Théorème 1.2. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors l'ensemble $f(K)$ est compact. En particulier il est borné, i.e. il existe M tel que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in K$. De plus la fonction $|f| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum sur K.*

Démonstration. Soit $(w_n)_n \in (f(K))^{\mathbb{N}}$. On montre que $(w_n)_n$ admet une sous-suite qui converge dans $f(K)$, i.e. il existe une sous-suite $(w_{\varphi(n)})_n$ et $w \in f(K)$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\varphi(n)} = w$. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $z_n \in K$ tel que $w_n = f(z_n)$. La suite $(z_n)_n$ ainsi construite est à valeurs dans K qui est compact donc elle admet une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un certain $z \in K$. Comme f est continue, la suite de terme général $f(z_{\varphi(n)}) = w_{\varphi(n)}$ converge vers $w = f(z) \in f(K)$. La suite $(w_n)_n$ possède donc bien une sous-suite convergente dans $f(K)$, ce qui prouve que $f(K)$ est compact.
Le même raisonnement appliqué à la fonction continue $|f| : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (c'est une composée de fonctions continues) montre que l'ensemble $|f|(K)$ est compact dans $\mathbb{R}$. Il est donc fermé et borné. Soit $M := \sup\limits_{z\in K} |f(z)| < \infty$. On va montrer que M est atteint. Comme $M := \sup\limits_{z\in K} |f(z)|$, il existe $(w_n)_n$, $w_n = |f(z_n)|$, dans $|f|(K)$ telle que $w_n \to M$. Comme $|f|(K)$ est fermé, on a $M \in |f|(K)$, i.e. il existe $z_M \in K$ tel que $|f(z_M)| = |f|(z_M) = M$. La fonction $|f|$ admet donc bien un maximum. Par le même raisonnement, on montre que $|f|$ admet aussi un minimum sur K. □

On utilisera aussi des suites et des séries de fonctions.

Définition 1.19. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur une partie non vide D de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

1. *La suite $(f_n)_n$ converge simplement sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $z \in D$, la suite complexe $(f_n(z))_n$ converge $f(z)$.*

2. *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si la suite réelle*
$$\left(\sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)|\right)_n$$
est bien définie et tend vers 0.

3. *La série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge simplement (resp. uniformément) sur D vers une $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ si la suite des sommes partielles*
$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} f_n\right)_N$$
converge simplement (resp. uniformément) sur D.

4. *La série de fonctions* $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge normalement sur* D *si la série réelle*

$$\left(\sum_{n=n_0}^{N} \sup_{z\in D} |f_n(z)|\right)_N$$

converge.

Proposition 1.14. *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions sur une partie non vide* D *de* $\mathbb{C}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*.*

1. *Si, pour tout* n*,* f_n *est continue et si la suite* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* D *vers une fonction* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$*, alors* f *est continue.*

2. *Si la série de fonctions* $\sum_{n\geq n_0} f_n$ *converge normalement sur* D *alors elle converge simplement sur* D *vers une fonction* $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ *et cette convergence est uniforme sur* D*.*

Démonstration. Voir un cours de L2. □

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Comme c'est une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on peut voir si elle est différentiable (cf. L2).

Définition 1.20. *Soit* Ω *un ouvert non-vide de* $\mathbb{C}$*,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $z_0 \in \Omega$*. On dit que* f *est différentiable en* z_0 *s'il existe une application* $\mathbb{R}$*-linéaire* L *sur* $\mathbb{C}$ *telle que, pour* $z \in \Omega$*,*

$$f(z) \;=\; f(z_0) \,+\, L(z-z_0) \,+\, o\big(|z-z_0|\big)\,. \tag{1.1}$$

Dans ce cas, l'application $\mathbb{R}$*-linéaire* L *est notée* $Df(z_0)$*.*

Lorsque f est différentiable en $z_0 = (x_0; y_0)$, on a vu en L2 les propriétés suivantes :
Tout d'abord, f est continue en z_0; cela découle de (1.1) et du fait qu'une application $\mathbb{R}$-linéaire L sur $\mathbb{C}$ est forcément continue en 0.
On considère les applications composantes de f que l'on note P et Q. Donc $P : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $P(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ et $Q(z) = \mathrm{Im}(f(z))$. Puisque f est différentiable en z_0, P et Q admettent en z_0 des dérivées partielles (premières) par rapport aux deux variables réelles (on note par x la première et par y la seconde). En effet, on a, pour $t \in \mathbb{R}^*$ assez petit, d'après (1.1),

$$\frac{f(x_0+t;y_0) - f(x_0;y_0)}{t} \;-\; L\big((1;0)\big) \;=\; o(1)$$

quand t tend vers zéro, ce qui donne, en prenant la partie réelle,

$$\frac{P(x_0+t;y_0) - P(x_0;y_0)}{t} \;-\; \mathrm{Re}\Big(L\big((1;0)\big)\Big) \;=\; o(1)$$

quand t tend vers zéro. Même chose pour les autres dérivées partielles.
De plus, la matrice de l'application $\mathbb{R}$-linéaire $Df(z_0)$ dans la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0;y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0;y_0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0;y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0;y_0) \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Lorsque f est différentiable en tout point de Ω, on peut considérer sa différentielle sur Ω, c'est-à-dire l'application $Df : \Omega \ni z \mapsto Df(z)$ qui est à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ des applications $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}$. On peut munir cet espace de la norme

$$\|L\|_{op} := \sup_{z\in\mathbb{C}^*} \frac{|L(z)|}{|z|} = \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ |z|\leq 1}} |L(z)| = \sup_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ |z|=1}} |L(z)| . \tag{1.3}$$

La différentielle Df est donc une application d'un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel à valeurs dans un autre $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Ceci donne un sens à la définition suivante.

Définition 1.21. *Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 (sur Ω) si f est différentiable en tout point de Ω et si sa différentielle est continue de Ω dans $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$.*

On peut repérer les fonctions de classe C^1 grâce à la

Proposition 1.15. *Classe C^1.*
Soit Ω un ouvert non-vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. La fonction f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles premières de P et Q partout existent sur Ω et sont des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Voir L2. □

Exemple 1.4. *Les applications $\mathbb{C} \ni z \mapsto z$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z}$, $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont $\mathbb{R}$-linéaires donc partout différentiables de différentielle constante. La matrice dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de ces différentielles est*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivement.

1.2.2 Fonctions d'une variable réelle.

On s'intéresse à la régularité de fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. De nouveau, il s'agit de fonctions d'une partie du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. On procède donc comme au paragraphe précédent.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour $t \in [a; b]$ et $\ell \in \mathbb{C}$, le fait que f tendent vers ℓ en t est défini par la définition 1.17 (avec $\Omega = \overline{\Omega} = [a; b]$ et a remplacé par t). La proposition 1.12 est encore valable et la continuité de f en t (resp. sur $[a; b]$) est définie comme dans la définition 1.18 (ou la définition 1.12). En utilisant le fait que les applications $\mathbb{R}^2 \ni (x; y) \mapsto x$ et $\mathbb{R}^2 \ni (x; y) \mapsto y$ sont continues (des deux variables), on peut vérifier la propriété suivante.

Proposition 1.16. *Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $t_0 \in [a; b]$. La fonction f est continue en t_0, resp. sur $[a; b]$, si et seulement si les fonctions réelles $\mathrm{Re}(f) : [a; b] \ni t \mapsto \mathrm{Re}\,(f(t))$ et $\mathrm{Im}(f) : [a; b] \ni t \mapsto \mathrm{Im}\,(f(t))$ sont continues en t_0, resp. sur $[a; b]$.*

La proposition 1.13 reste valable dans la présente situation en remplaçant, pour la composition, f et g par $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$, respectivement. On a aussi la continuité de $g \circ f$ en t_0 si $g : f([a;b]) \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en $f(t_0)$.
En adaptant la preuve du théorème 1.2, on montre qu'une fonction continue $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est bornée, que $f([a;b])$ est compact et que $|f|$ admet un minimum et un maximum.
Les résultats de la proposition 1.14 sont encore valables pour des suites (séries) de fonctions définies sur un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Comme dans la définition 1.20, on dit que f est différentiable en $t_0 \in]a;b[$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (cette fois !) telle que, pour tout $t \in [a;b]$,

$$f(t) \;=\; f(t_0) \,+\, L(t - t_0) \,+\, o\big(|t - t_0|\big)\,, \tag{1.4}$$

quand t tend vers t_0. Une $\mathbb{R}$-linéaire L de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ a une forme particulière. Posons $w = L(1) \in \mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, d'après la $\mathbb{R}$-linéarité, $L(t) = L(t \cdot 1) = tL(1) = tw$. La propriété (1.4), quand t tend vers t_0, est donc équivalente à

$$f(t) \;=\; f(t_0) \,+\, (t - t_0)w \,+\, o\big(|t - t_0|\big)\,, \tag{1.5}$$

quand t tend vers t_0, ce qui est encore équivalent à

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) \,-\, f(t_0)}{t \,-\, t_0} \;=\; w\,. \tag{1.6}$$

Définition 1.22. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Soit $t_0 \in [a;b]$. On dit que f est dérivable en t_0 si la limite dans (1.6) existe dans $\mathbb{C}$. Dans ce cas, cette limite est le nombre dérivé de f en t_0, noté $f'(t_0)$.*

On remarque que, si f est dérivable en t_0, f est continue en t_0 d'après (1.5).
On a naturellement la

Définition 1.23. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 (sur $[a;b]$) si f est dérivable en tout point de $[a;b]$ et si sa dérivée $f' : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$, qui à $t \in [a;b]$ associe $f'(t) \in \mathbb{C}$, est continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{C}$.*

Dans la suite, la notion suivante sera particulièrement importante.

Définition 1.24. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est (de classe) C^1 par morceaux (sur $[a;b]$) s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ de $[a;b]$ tels que, pour tout $j \in (\mathbb{N} \cap [0;n-1])$, f est dérivable sur $]t_j;t_{j+1}[$ et la restriction de f' à $]t_j;t_{j+1}[$ admet une limite complexe en t_j et en t_{j+1}.*

Il est commode de reformuler, à l'aide de la notion de concaténation (cf. définition 1.13), cette définition de la façon équivalente suivante :

Proposition 1.17. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$.*

1. *La fonction f est continue et C^1 par morceaux si et seulement si f est la concaténation d'un nombre fini de fonctions C^1 sur un segment.*

2. *Si la fonction f est continue et C^1 par morceaux alors il existe une unique famille finie f_0, ..., f_n ($n \in \mathbb{N}$) de courbes C^1 sur un segment telle que f est la concaténation de f_1, ..., f_n et, pour tout $t \in [a;b]$ tel que, pour un j, $f_{j-1}(t) = f_j(t)$, f n'est pas dérivable en t.*

Démonstration. Voir TD. □

Enfin, si $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on définit son intégrale sur le segment $[a;b]$ par

$$\int_a^b f \ := \ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ := \ \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \ + \ i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \ \in \ \mathbb{C}\,, \tag{1.7}$$

où les intégrales à droite de l'égalité sont des intégrales usuelles (de Riemann) de fonctions continues de $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \ := \ -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si f est la dérivée d'une fonction $F : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ alors on vérifie, en utilisant (1.7), que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t \ = \ F(b) \ - \ F(a) \ =: \ [F]_a^b\,. \tag{1.8}$$

Les propriétés de changement de variables, d'intégration par parties et de relation de Chasles des intégrales usuelles passent par la formule (1.7) aux nouvelles intégrales. Toujours grâce à cette formule, on vérifie que, si $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) \ + \ g(t)\big)\,\mathrm{d}t \ = \ \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ + \ \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.9}$$

On admet la propriété suivante :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \ \leq \ \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.10}$$

où l'intégrale à droite de l'inégalité est encore l'intégrale usuelle de la fonction réelle continue $|f|$. On utilisera souvent le résultat suivant :

Proposition 1.18. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (au sens de la définition 1.19 avec $D = [a;b]$). D'après la proposition 1.14, f est continue donc son intégrale sur $[a;b]$ est bien définie. Alors la suite complexe*

$$\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_n \quad \textit{converge vers} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

En particulier, si la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément vers une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ alors la série complexe

$$\sum_{n\geq n_0}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{converge vers} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \textit{i.e.}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \ = \ \int_a^b\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après (1.9) et (1.10),

$$0 \le \left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le (b-a) \sup_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f(x)|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme et du théorème des gendarmes. □

1.2.3 Intégrale le long d'un chemin.

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. L'objectif ici est de construire une "intégrale de f le long d'une courbe paramétrée convenable tracée dans Ω".

Définition 1.25. *Chemins. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \le b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. L'image de γ est l'ensemble $\Gamma := \gamma([a;b]) \subset \mathbb{C}$. L'ensemble Γ est un compact si γ est continue (cf. théorème 1.2).*

1. *On dit que γ est un* chemin *si $a = b$ ou bien si $a < b$ et si γ est continue et C^1 par morceaux.*
2. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a < b$ est dit C^1 si l'application γ est C^1.*
3. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a \le b$ est dit* fermé *si $\gamma(a) = \gamma(b)$, i.e. les points de départ et d'arrivée sont identiques.*
4. *Un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $a < b$ est dit* simple *si γ est injectif sur $[a;b[$, i.e. mis à part éventuellement à ses extrêmités, γ ne passe pas deux fois par le même "point de $\mathbb{C}$".*
5. *Un chemin fermé simple est appelé un* lacet.

Exemple 1.5. *Chemins classiques.*

1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{it}$. Il se trouve que γ est C^1 et que $\gamma'(t) = ire^{it}$. C'est donc un chemin. Comme $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, il est fermé. Il se trouve que la restriction de γ à $[0;2\pi[$ est injective. Donc γ est simple. Il s'agit donc d'un lacet. L'image Γ de γ est le cercle $C(z_0;r)$. On remarque que les fonctions $[0;\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ et $]\pi;2\pi] \ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ sont croissantes. On dit que γ est orienté positivement ou que Γ est parcouru dans le sens trigonométrique positif. Tout cela sera justifié plus loin (cf. corollaire 2.4).*
2. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{-it}$. Comme au 1, γ est un lacet d'image $\Gamma = C(z_0;r)$. Cette fois les applications $[0;\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ et $]\pi;2\pi[\ni t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ sont décroissantes. On dit que γ est orienté négativement ou que Γ est parcouru dans le sens trigonométrique négatif.*
3. *Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow C(z_0;r)$ un chemin et $\Gamma = \gamma([a;b])$. L'ensemble*

$$\big\{ t \in [a;b]\,;\ \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0) \in\ ]-\pi;\pi[\big\}$$

est une réunion disjointe de sous-intervalles de $[a;b]$. On dit que que γ est orienté positivement (resp. négativement) ou que Γ est parcouru dans le sens trigonométrique positif (resp. négatif) si, sur chacun des sous-intervalles précédents, la fonction $t \mapsto \mathrm{Arg}(\gamma(t) - z_0)$ est croissante (resp. décroissante).

4. *Pour* $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$*, on considère l'application* $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par* $\psi_{z_1;z_2}(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2$*. C'est un chemin dont l'image est le segment* $[z_1; z_2]$ *(cf. TD) et est parcourue de* z_1 *vers* z_2 *dans le sens croissant des* t*. Si* $z_1 \neq z_2$*,* γ *est un chemin simple.*

Définition 1.26. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue. Soit* $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *un chemin* C^1 *dont l'image est incluse dans* Ω*, i.e. tel que* $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \Omega$*. On appelle intégrale de* f *le long de* γ *le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.11}$$

Si $a \in \mathbb{R}$ *et* $\gamma : [a;a] \longrightarrow \Omega$*, on pose*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; 0\,. \tag{1.12}$$

La définition (1.11) est assez naturelle. Le long du chemin γ on a $z = \gamma(t)$ et tout se passe “comme si” on faisait le changement de variable $z = \gamma(t)$, le $\mathrm{d}z$ donnant alors le $\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$ comme pour les changements de variables dans les intégrales dans $\mathbb{R}$. Attention, ce n'est cependant pas un changement de variable qu'on fait ici mais bien la définition de la quantité à gauche de (1.11).
Il est important pour la suite d'étendre cette notion au cas où le chemin γ n'est que C^1 par morceaux. Pour ce faire, on utilise la proposition 1.17.

Définition 1.27. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*,* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue et* $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *(avec* $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ *et* $a < b$*) un chemin dont l'image est incluse dans* Ω*, i.e. tel que* $\Gamma = \gamma([a,b]) \subset \Omega$*. Soit* γ_1*, ...,* γ_n *la famille de chemins* C^1 *donnée par le 2 de la proposition 1.17, dont la concaténation donne* γ*. On appelle intégrale de* f *le long de* γ *le nombre complexe*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;:=\; \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{1.13}$$

Exemple 1.6. *Soit* $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ *et* γ *un paramétrage du segment d'extrêmités* α *et* β*. Par exemple,* $\gamma : [0;1] \ni t \mapsto \alpha + t(\beta - \alpha) \in \mathbb{R}$*. Étant donnée une fonction continue* f *sur* $\mathbb{C}$*, on a alors, puisque* $\gamma'(t) = \beta - \alpha$ *pour tout* t*, par changements de variables* $s = \alpha + t(\beta - \alpha)$ *et* $r = \alpha + \beta - s$*,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^1 f\big(\alpha + t(\beta-\alpha)\big)\cdot(\beta-\alpha)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\alpha^\beta f(s)\,\mathrm{d}s \;=\; -\int_\beta^\alpha f(r)\,\mathrm{d}r\,.$$

Lorsque $\alpha \leq \beta$*, on retrouve l'intégrale (1.7) entre* α *et* β *de la restriction de* f *à* $[\alpha;\beta]$*. Lorsque* $\beta \leq \alpha$*, on retrouve l'opposé de l'intégrale (1.7) entre* β *et* α *de la restriction de* f *à* $[\beta;\alpha]$*.*
Dans le cas $\alpha \leq \beta$*, on peut aussi paramétrer le segment* $[\alpha;\beta]$ *par* $\tilde{\gamma} : [\alpha;\beta] \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$*. On a alors* $\tilde{\gamma}'(t) = 1$ *pour tout* t *et on retrouve à nouveau*

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On déduit de la propriété (1.9) et de (1.11) et (1.13), la

Proposition 1.19 (Linéarité). *Soit Ω un ouvert non vide, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ (avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \leq b$) un chemin dont l'image est incluse dans Ω. Alors*

$$\int_\gamma (\lambda f + g)(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lambda \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Exemple 1.7. *Intégrales le long d'arcs de cercle.*

1. *Soit γ_1 et γ_2 les chemins définis par $\gamma_1 : [0;\pi/2] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [0;3\pi/2] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image Γ_1 de γ_1 est le quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens trigonométrique positif (on parle aussi de sens direct) tandis que l'image de γ_2 est le trois-quart de cercle de centre 0 et de rayon r partant du point d'affixe r et allant au point d'affixe ir dans le sens inverse du sens trigonométrique négatif (on parle de sens indirect). Leurs images Γ_1 et Γ_2 sont incluses dans $\mathbb{C}^*$. Tout ceci est justifié par les propriétés de l'exponentielle complexe (cf. théorème 2.1).*
Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 1/z$. Elle est continue. On a
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{it}} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; i\frac{\pi}{2},$$
tandis que
$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{3\pi/2} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times (-ir)\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t \;=\; -i\frac{3\pi}{2}.$$
On peut voir sur cet exemple que l'intégrale de f entre les deux points d'affixes respectives r et ir dépend a priori du chemin choisi puisque les intégrales le long de γ_1 et de γ_2 sont différentes.

2. *Considérons maintenant les chemins $\gamma_3 : [0;\pi/4] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{i2t} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_4 : [3\pi/2; 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{-it} \in \mathbb{C}$. L'image de γ_3 est Γ_1 parcourue dans le même sens que γ_1 tandis que celle de γ_4 est Γ_1 mais parcourue dans le sens inverse. On a*
$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/4} \frac{1}{r\mathrm{e}^{i2t}} \times 2ir\mathrm{e}^{i2t}\,\mathrm{d}t \;=\; i\frac{\pi}{2}\,,$$
$$\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{3\pi/2}^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{-it}} \times (-ir)\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t \;=\; -i\frac{\pi}{2}\,.$$
On peut voir que l'intégrale le long de γ_3 est la même que pour γ_1 (les images des chemins sont les mêmes et parcourues dans le même sens) tandis que celle le long de γ_4 en est l'opposée (l'image est la même mais parcourue dans le sens inverse).

3. *On considère enfin les chemins $\gamma_5 : [0;2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ et $\gamma_6 : [0;4\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$. Leurs images sont le cercle $C(0;r)$ parcouru dans le sens trigonométrique positif, une fois pour γ_5 et deux fois pour γ_6. On calcule facilement cette fois que $\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi$ et $\int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z = 4i\pi = 2\int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z$. Le fait de parcourir deux fois le cercle a pour effet de compter double l'intégrale de f.*

Les propriétés 2. et 3. observées dans l'exemple ci-dessus sont assez naturelles et ne sont pas un cas particulier.

Définition 1.28. *Soit $(a_1; b_1; a_2; b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. Soit $\gamma_1 : [a_1; b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2; b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins.*

1. *On dit que γ_1 est* équivalent *à γ_2 s'il existe une bijection, C^1 et strictement croissante, $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Dans ce cas, les images de γ_1 et γ_2 sont les même, parcourues dans le même sens.*

2. *On dit que γ_1 est* opposé *à γ_2 s'il existe une bijection, C^1 et strictement décroissante, $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. Dans ce cas, les images de γ_1 et γ_2 sont les même mais γ_1 et γ_2 parcouruent l'image dans des sens opposés.*

Remarque 1.10. *On a vu en L1 qu'une application $\varphi : [a_1; b_1] \longrightarrow [a_2; b_2]$, bijective et continue, est forcément strictement monotone.*

Définition 1.29. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Si $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin, on notera $\gamma_{\text{opp}} : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma_{\text{opp}}(t) = \gamma(a + b - t)$. L'image de γ_{opp} est la même que celle de γ mais parcourue dans le sens inverse. Comme $[a; b] \ni t \mapsto a + b - t \in [a; b]$ est bijective, C^1 et strictement décroissante, γ_{opp} est opposé à γ.*
Si $\gamma : [a; a] \longrightarrow \mathbb{C}$, on pose $\gamma_{\text{opp}} = \gamma$.

Proposition 1.20. *Soit Ω un ouvert non vide, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et γ_1, γ_2 deux chemins d'images incluses dans Ω.*

1. *Si γ_1 est* équivalent *à γ_2 alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

2. *Si γ_1 est* opposé *à γ_2 alors $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. En particulier, pour tout chemin γ, on a $\displaystyle\int_{\gamma_{\text{opp}}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.*

Démonstration. Voir TD. □

On est parfois amené à décomposer un chemin en plusieurs morceaux. On a alors la propriété suivante qui est l'analogue de la relation de Chasles.

Proposition 1.21. *Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \leq b \leq c$. Soit $\gamma_1 : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b; c] \longrightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. La concaténation $\gamma = \gamma_1 \mathring{+} \gamma_2$ est bien définie (cf. définition 1.13) et γ est aussi un chemin. Si Ω est un ouvert contenant l'image de γ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue alors*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Corollaire 1.3. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut considérer le chemin fermé γ_n obtenu par concaténation de n copies de γ. Alors, pour tout ouvert Ω tel que $\gamma([a; b]) \subset \Omega$ et toute fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, on a*

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; n \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ces deux résultats sont démontrés en TD.

Une autre propriété courante de l'intégrale pour les fonctions de variable(s) réelle(s) est l'inégalité (1.10). Ici, il faut faire un peu plus attention. On ne peut pas simplement comparer

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \quad \text{et} \quad \int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z$$

puisque cette dernière quantité est a priori un nombre complexe (le "dz" est complexe). Prenons par exemple la fonction $f(z) = 1/z$ et γ le quart de cercle comme dans l'Exemple 1.7. On a alors

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;=\; \left|\int_0^{\pi/2} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t\right| \;=\; \left|i\frac{\pi}{2}\right| \;=\; \frac{\pi}{2}$$

tandis que

$$\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} \times ire^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\mathrm{e}^{it}\right]_0^{\pi/2} \;=\; i-1\,.$$

On ne peut pas comparer $\pi/2$ et $i-1$. A-t-on la propriété suivante, qui au moins a un sens,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \left|\int_\gamma |f(z)|\,\mathrm{d}z\right| \;?$$

Pas en général puisque, dans l'exemple précédent, $\pi/2 > |i-1| = \sqrt{2}$.
En revanche, on peut écrire, lorsque γ est C^1,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;=\; \left|\int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \int_a^b \left|f\left(\gamma(t)\right)\right| \times \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t\,,$$

d'après (1.10). On utilisera régulièrement ce type de majoration par la suite, voir par exemple l'application à la fin de la Section 4.3.
La présence du terme $|\gamma'(t)|$, au lieu de $\gamma'(t)$, fait qu'on ne reconnait pas dans cette dernière intégrale une intégrale le long d'un chemin. En majorant, pour tout $t \in [a;b]$, la quantité $|f(\gamma(t))|$ par sa borne supérieure, on en déduit, toujours pour γ de classe C^1,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \left(\sup_{t\in[a,b]} \left|f\big(\gamma(t)\big)\right|\right) \times \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.14}$$

La dernière intégrale ne dépend que du chemin γ et a une interprétation géométrique naturelle. C'est en fait la longueur du chemin γ. À part sur quelques exemples simples, cela ne paraît pas clair mais on peut le démontrer.
Si γ n'est pas C^1 mais seulement C^1 par morceaux, on exploite la proposition 1.17. On obtient d'abord la longueur d'un tel chemin et on vérifie que (1.14) est encore valable.

Définition 1.30. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin C^1. On appelle longueur de γ la quantité*

$$L(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.15}$$

Lorsque γ est seulement C^1 par morceaux, γ est la concaténation des chemins C^1 γ_1, …, γ_n donnés par le 2 de la proposition 1.17 et on pose

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{k=1}^{n} L\big(\gamma_k\big)\,. \tag{1.16}$$

Si $\gamma : [a;a] \longrightarrow \mathbb{C}$, sa longueur $L(\gamma)$ est choisie nulle.

Remarque 1.11. *En TD, on donne une définition plus naturelle et plus intuitive de la longueur d'une courbe paramétrée et on montre l'égalité (1.15) pour les chemins C^1 et (1.16) pour les autres. Cela montre, en particulier, que la définition (1.16) ne dépend pas du choix de concaténation de chemins donnant γ. Comme un chemin C^1 est aussi une concaténation de chemins C^1 (cf. proposition 1.10), on peut appliquer (1.16) dans ce cas et retrouver la valeur de (1.15).*

On peut alors adapter le raisonnement précédent pour montrer (cf. TD) la

Proposition 1.22. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ un chemin et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Alors*

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; L(\gamma)\cdot \sup_{t\in[a;b]} \big| f\big(\gamma(t)\big)\big| \;=\; L(\gamma)\cdot \sup_{w\in\gamma([a;b])} |f(w)|\,.$$

Proposition 1.23. *Si γ_1 est équivalent ou opposé à γ_2 alors $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.*

Démonstration. Voir TD. □

Exemple 1.8. *Soit $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$. Soit $\gamma : [0;1] \ni t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$, qui est de classe C^1. On a $\gamma([0;1]) = [z_1;z_2]$. Comme $\gamma'(t) = z_2 - z_1$, on trouve donc, évidemment, $L(\gamma) = \int_0^1 |z_2 - z_1|\,\mathrm{d}t = |z_2 - z_1|$. Soit σ la concaténation de γ et γ_{opp}. On a $\sigma([0;1]) = [z_1;z_2]$ mais $L(\sigma) = 2|z_2 - z_1|$.*

Remarque 1.12. *Au vu de l'exemple précédent, il est naturel de définir la longueur de l'image d'un chemin $\gamma_0 : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ par la longueur $L(\gamma)$ d'un chemin $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ tel que $\gamma([a;b]) = \gamma_0([c;d])$ et la restriction de γ à $[a,b[$ est injective.*
En paramétrant le cercle $C(z_0,r)$ par le lacet $\gamma : [0;2\pi] \ni t \mapsto z_0 + r\mathrm{e}^{it}$, la longueur du cercle est donc $L(\gamma)$ et on retrouve

$$L(\gamma) \;=\; \int_0^{2\pi} \left| ir\mathrm{e}^{it} \right|\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t \;=\; 2\pi r\,.$$

Remarquez que, pour démontrer ça, on a utilisé la construction de π telle que donnée dans le théorème 2.1 et les propriétés qui en ont suivi. La définition de π donnée dans le théorème 2.1 coincide donc bien avec la définition usuelle et reliant le rayon d'un cercle avec son périmètre.
Plus généralement, si $\theta \in [0;2\pi[$, l'arc de cercle de centre 0 et allant du point d'affixe 1 au point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$ est paramétré par le chemin simple C^1 $\gamma : [0;\theta] \ni t \mapsto \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ donc sa longueur est

$$L(\gamma) \;=\; \int_0^{\theta} \left| i\mathrm{e}^{it} \right|\,\mathrm{d}t \;=\; \theta\,.$$

On termine ce paragraphe par l'équivalent de la proposition 1.18 pour les intégrales le long d'un chemin.

Proposition 1.24. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin d'image Γ. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur Γ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ (au sens de la définition 1.19 avec $D = \Gamma$). D'après la proposition 1.14, f est continue donc son intégrale le long de γ est bien définie. Alors la suite complexe*

$$\left(\int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w\right)_n \quad \textit{converge vers} \quad \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

En particulier, si la série de fonctions $\sum_{n\geq n_0} f_n$ converge uniformément vers une fonction $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ alors la série complexe

$$\sum_{n\geq n_0} \int_\infty f_n(w)\,\mathrm{d}w \quad \textit{converge vers} \quad \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w\,,\ \textit{i.e.}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_\gamma \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(w)\right)\mathrm{d}w\,.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après les propositions 1.19 et 1.22,

$$0 \leq \left|\int_\gamma f_n(w)\,\mathrm{d}w - \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w\right| = \left|\int_\gamma \big(f_n(w) - f(w)\big)\,\mathrm{d}w\right| \leq L(\gamma)\sup_{w\in\Gamma}\left|f_n(w) - f(w)\right|$$

et le résultat découle de la convergence uniforme sur Γ et du théorème des gendarmes. $\square$

1.3 Holomorphie.

Pour les fonctions d'une variable complexe dans un ouvert, on va définir une notion de $\mathbb{C}$-dérivabilité ou holomorphie.

1.3.1 Définition et premières propriétés.

Pour parler de dérivabilité on va maintenant supposer que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 1.31. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$.*

1. *On dit que f est holomorphe ou $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.17}$$

admet une limite (dans $\mathbb{C}$), lorsque $z \to z_0$. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite. C'est le nombre $\mathbb{C}$-dérivé de f en z_0.

2. *On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable ou* holomorphe *sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout $z_0 \in \Omega$.*

3. *On dit que f est une fonction* entière *si f est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}$.*

4. *On dit que f est de classe C_h^1 (sur Ω) si elle est $\mathbb{C}$-dérivable (sur Ω) et si la fonction $f' : \Omega \ni z \mapsto f'(z)$ est continue. Par récurrence, elle est C_h^k, $k \geq 2$, si elle est C_h^{k-1} et si $f^{(k-1)}$ est C_h^1. Elle est C_h^∞ si elle est C_h^k, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque 1.13. *Exemples et contre-exemples simples.*

1. *Si f est une fonction constante, f est holomorphe en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ et sa $\mathbb{C}$-dérivée $f' : \mathbb{C} \ni z \mapsto f'(z)$ est nulle, donc continue. Donc f est C_h^1. Comme f' est constante, elle est aussi C_h^1 donc f est C_h^2. Par récurrence, on vérifie que f est C_h^∞.*

2. *Si f est l'identité sur $\mathbb{C}$ alors f est holomorphe en tout point $z_0 \in \mathbb{C}$ et sa $\mathbb{C}$-dérivée $f' : \mathbb{C} \ni z \mapsto f'(z)$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$. Comme au 1, on vérifie que f est C_h^∞.*

3. *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \overline{z}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Le taux de variation (1.17) n'a pas de limite dans $\mathbb{C}$ lorsque $z \to z_0$. Vérifions cela.*
Supposons que ce taux tendent vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors, pour toute application $\gamma :]0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ tendant vers z_0 en 0, le taux
$$\frac{\overline{\gamma(t)} - \overline{z_0}}{\gamma(t) - z_0}$$
tend vers ℓ, quand $t \to 0$. En prenant $\gamma :]0;1] \ni t \mapsto z_0 + t$, on trouve que ce taux tend vers 1 mais, en prenant $\gamma :]0;1] \ni t \mapsto z_0 + it$, on trouve qu'il tend vers -1. Donc $1 = \ell = -1$, contradiction.

4. *De même, on vérifie que* $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont nulle part holomorphes.*

5. *On a vu dans l'exemple 1.4 que les applications $\bar{\cdot}$,* Re *et* Im *sont partout différentiables. Les points 3 et 4 prouvent que les notions d'holomorphie et de différentiabilité sont distinctes.*

6. *L'emploi du mot "holomorphe" sera expliqué dans la remarque 4.7.*

Dans le cadre de la définition 1.31, on voit que le taux de variation (1.17) admet $\ell \in \mathbb{C}$ pour limite, lorsque $z \to z_0$, si et seulement si le taux
$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$
tend vers ℓ, lorsque $h \to 0$ (dans $\mathbb{C}$), si et seulement si
$$f(z_0 + h) \;=\; f(z_0) \;+\; \ell \cdot h \;+\; o(|h|)\,, \tag{1.18}$$
lorsque $h \to 0$ (dans $\mathbb{C}$), si et seulement si
$$f(z) = f(z_0) + \ell \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)\,, \tag{1.19}$$
quand $z \to z_0$.
En particulier, on voit en utilisant (1.19) par exemple que, si f est holomorphe en z_0, f est continue en z_0.
Les propriétés suivantes se montrent alors comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en utilisant par exemple (1.18).

Proposition 1.25. *Opérations. Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.*

1. *Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes (resp. C^1_h) et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont holomorphes (resp. C^1_h) et on a, pour tout $z_0 \in \Omega$,*

$$(f+\lambda g)'(z_0) \;=\; f'(z_0) + \lambda g'(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) \;=\; f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\,.$$

Si, de plus, g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est holomorphe (resp. C^1_h) et on a

$$\forall\, z_0 \in \Omega\,, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) \;=\; \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}\,.$$

2. *Soit $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes (resp. C^1_h) et telles que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$. Alors $g \circ f$ est holomorphe (resp. C^1_h) sur Ω_f et on a $(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0) \times g'(f(z_0))$, pour tout $z_0 \in \Omega_f$.*

3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe (resp. C^1_h) et $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ dérivable (resp. C^1). Alors la composée $f \circ \gamma$ est dérivable (resp. C^1) sur I et, pour tout $t \in I$, $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \times \gamma'(t)$.*

Exercice 1.3. *Montrez la proposition ci-dessus.*

Exemple 1.9. *Fonctions polynômes.*

1. *En utilisant la proposition 1.25 et les points 1 et 2 de la remarque 1.13, on montre que les fonctions polynômes sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ du type*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k\, z^k \quad \text{pour des } a_k \in \mathbb{C}\,,$$

sont C^1_h sur $\mathbb{C}$. Si P et Q sont deux fonctions polynômes alors $f = \frac{P}{Q}$ est C^1_h sur $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\,;\, Q(z) = 0\}$, par la proposition 1.25.

2. *Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = |z|^2$. C'est une fonction polynôme en les variables réelles $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ puique $g(x;y) = x^2 + y^2$. Comme fonction de ces deux variables réelles, elle est de classe C^∞. Mais g n'est holomorphe qu'en 0. Vérifions ce dernier point.*
Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|(g(z) - g(0))/z| = |z|$, qui tend vers 0, lorsque $z \to 0$. Donc g est $\mathbb{C}$-dérivable en 0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé 0.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $z \neq z_0$. On a

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{|z - z_0 + z_0|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \frac{|z - z_0|^2 + (z - z_0)\overline{z_0} + \overline{z - z_0}\cdot z_0}{z - z_0}$$
$$= \frac{|z - z_0|^2}{z - z_0} + \overline{z_0} + z_0 \cdot \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}\,.$$

Le premier terme à droite tend vers 0, quand $z \to z_0$, car son module est majoré par $|z - z_0|$. Si le terme de gauche avait une limite dans $\mathbb{C}$, lorsque $z \to z_0$, il en serait de même du dernier terme à droite et, comme $z_0 \neq 0$, le rapport $\overline{z - z_0}/(z - z_0)$ aurait une limite, lorsque $z \to z_0$. Contradiction avec le point 3 de la remarque 1.13.

Définition 1.32. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que F est une primitive de f sur Ω si F est holomorphe sur Ω et sa $\mathbb{C}$-dérivée F' est égale à f.*

Exemple 1.10. *Puissances.*

1. *Si $m \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^m$ admet, pour primitive sur $\mathbb{C}$, la fonction $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \frac{1}{m+1}\, z^{m+1}$.*

2. *Si $m \in ((-\mathbb{N}) \setminus \{-1\})$, la fonction définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z^m$ admet, pour primitive sur $\mathbb{C}^*$, la fonction $F : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \frac{1}{m+1}\, z^{m+1}$.*

3. *On verra plus loin que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ (cf. exemple 1.11).*

Bien qu'à première vue tout semble similaire à ce qu'on fait dans $\mathbb{R}$, on va voir qu'il n'en est rien et que le fait de prendre des (limites de) taux d'accroissements dans $\mathbb{C}$ a de grosses conséquences:

1. il va être beaucoup "plus difficile" à une fonction d'être dérivable dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$. La fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^2$, par exemple, est dérivable mais on a vu que $z \mapsto |z|^2$ n'était pas $\mathbb{C}$-dérivable.
   En parlant de fonctions non $\mathbb{C}$-dérivables, on a vu que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ était continue sur $\mathbb{C}$ mais $\mathbb{C}$-dérivable nulle part. Essayez de construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui soit continue partout mais dérivable nulle part... C'est faisable, mais beaucoup plus difficile.

2. les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables auront beaucoup de propriétés que les fonctions réelles dérivables d'une variable réelle. La plus frappante au début est sûrement le fait qu'une fonction holomorphe sera automatiquement C_h^∞.

3. les fonctions d'une variable complexe qui sont continues n'ont pas forcément de primitive. C'est un peu relié au point précédent : si f a une primitive alors il existe F holomorphe telle que $F' = f$. Donc, d'après ce qu'on a dit dans le point précédent, F sera C_h^∞ et donc f aussi. En particulier f sera holomorphe. Conclusion : seules les fonctions holomorphes sur Ω peuvent avoir une primitive sur Ω.
   Attention, on ne dit pas que toutes les fonctions holomorphes sur Ω ont une primitive sur Ω. Ce ne sera par exemple pas le cas de la fonction $z \mapsto 1/z$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Peut-on utiliser les primitives pour calculer des intégrales le long d'un chemin ? Oui, comme le montre la

Proposition 1.26. *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F. Alors, pour tout chemin $\gamma : [a; b] \longrightarrow \Omega$ (avec $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$),*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,. \tag{1.20}$$

En particulier, si γ est fermé alors l'intégrale précédente est nulle.

Remarque 1.14. *On suppose que f admet une primitive F sur Ω. On retrouve ici l'idée que pour calculer l'intégrale d'une fonction f, il "suffit" de faire la différence des valeurs de F aux extrémités du chemin. En particulier, la valeur de l'intégrale ne dépend que de ces extrémités. Autrement dit, si $\tilde{\gamma}$ est un autre chemin dans Ω avec les mêmes extrémités que γ, alors les intégrales de f le long de $\tilde{\gamma}$ et le long de γ sont égales.*
Lorsque γ est fermé, l'intégrale dans (1.20) est nulle. On n'a donc pas besoin de connaître explicitement F.

Démonstration. Si $a = b$, (1.20) est vraie. On traite maintenant le cas où γ est C^1 (donc $a < b$). D'après le 3 de la proposition 1.25, la fonction $[a;b] \ni t \mapsto F(\gamma(t))$ est dérivable de dérivée $[a;b] \ni t \mapsto F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. D'après (1.8) et le fait que $F' = f$, on a donc

$$F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) \;=\; \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

d'après (1.11).
Passons au cas où γ est seulement C^1 par morceaux. Soit γ_1, ..., γ_n la famille de chemins C^1 donnée par le 2 de la proposition 1.17. Pour $1 \leq j \leq n$, $\gamma_j : [t_{j-1}; t_j] \longrightarrow \Omega$ et on a $a = t_0$ et $b = t_n$. En utilisant la définition de l'intégrale de f le long de γ et l'argument précédent pour chaque chemin γ_j, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{j=1}^n F\big(\gamma(t_j)\big) - F\big(\gamma(t_{j-1})\big) \;=\; F\big(\gamma(t_n)\big) - F\big(\gamma(t_0)\big)\\ &= F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\,.\end{aligned}$$

□

Exemple 1.11. *Reprenons l'exemple 1.7 (voir aussi l'exemple 1.10). Comme*

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \neq \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,,$$

γ_1 et γ_2 ayant les mêmes extrêmités, la proposition 1.26 prouve qu'il n'y a pas d'ouvert contenant γ_1 et γ_2 sur lequel $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = 1/z$, admette une primitive.

Exemple 1.12. *Soit $f(z) = \bar{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto r\mathrm{e}^{it} \in \mathbb{C}$ un paramétrage du cercle $C(0;r)$ parcouru dans le sens trigonométrique positif. On a alors*

$$\int_\gamma \bar{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r\mathrm{e}^{-it} \times ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\pi r^2 \neq 0.$$

Comme γ est fermé, on en déduit que la fonction $z \mapsto \bar{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}$, ni même sur aucun ouvert contenant γ.

On termine ce paragraphe par une propriété importante.

Proposition 1.27. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, i.e. un ouvert non vide connexe par arcs. Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe de $\mathbb{C}$-dérivée nulle alors f est constante.*

Remarque 1.15. *Pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le résultat analogue repose sur le théorème des accroissements finis et n'est vrai que pour les fonctions définies sur un intervalle. L'hypothèse "intervalle" est ici remplacée par "connexe par arcs": l'ensemble de définition doit être en un seul morceau.*
On donne ci-dessous une preuve de la proposition 1.27 basée sur les intégrales le long d'un chemin. On obtiendra une autre preuve en combinant la proposition 3.3 et le théorème 3.3.

Démonstration. On traite d'abord le cas où Ω est étoilé.
Soit $z_0 \in \Omega$ tel que Ω soit étoilé par rapport à z_0. Soit $z \in \Omega$ et $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = tz + (1-t)z_0$. On a $\gamma([0;1]) \subset \Omega$ et γ est C^1. Comme f est holomorphe, $f \circ \gamma$ est dérivable et $(f \circ \gamma)' = (f' \circ \gamma)\gamma' = 0$, puisque f' est nulle. Donc

$$f(z) - f(z_0) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Donc f est constante égale à $f(z_0)$.
On traite maintenant le cas général. Pour ce faire, on a besoin des notions suivantes.
On appelle chemin polygonal la concaténation d'un nombre finis de chemins du type ψ : $[0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\psi(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, pour $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$.
On remarque qu'un tel chemin est C^1 par morceaux.
On dit qu'un ouvert non vide U de $\mathbb{C}$ est connexe par lignes polygonales si, pour tout $(w;z) \in U^2$, il existe un chemin polygonal $\gamma : [a;b] \longrightarrow U$ tel que $\gamma(a) = w$ et $\gamma(b) = z$.
On s'appuie maintenant sur le

Lemme 1.1. *Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Alors U est connexe par arcs si et seulement si U est connexe par lignes polygonales.*

Démonstration. Comme un chemin polygonal est une courbe paramétrée continue, on voit que la connexité par lignes polygonales implique la connexité par arcs. La réciproque sera démontrée en TD. $\square$

On reprend la preuve de la proposition 1.27. Soit $z_0 \in \Omega$ fixé. Soit $z \in \Omega$. Comme Ω est connexe par arcs, il est aussi connexe par lignes polygonales, d'après le lemme 1.1. Il existe donc $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ un chemin polygonal tel que $\gamma(a) = z_0$ et $\gamma(b) = z$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$, $(z_1; \cdots; z_n) \in \Omega^n$ et des chemins C^1 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ tels que $z_1 = z_0$, $z_n = z$, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $\psi_k : [0;1] \ni t \mapsto tz_{k+1} + (1-t)z_k$ et γ est la concaténation des chemins $\psi_1, \cdots, \psi_n$. En appliquant l'argument du début de la preuve, on montre successivement $f(z_0) = f(z_1) = f(z_2)$, $f(z_k) = f(z_{k+1})$, pour $2 \leq k \leq n-1$. D'où $f(z_0) = f(z_n) = f(z)$. $\square$

1.3.2 $\mathbb{C}$-dérivabilité et différentiabilité.

On a vu plus haut que les notions de $\mathbb{C}$-dérivabilité et de différentiabilité ne sont pas identiques. Il y a cependant un lien entre les deux, comme on va le voir maintenant.

Proposition 1.28. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe (ou $\mathbb{C}$-dérivable) en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 et sa différentielle $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Lorsque f est différentiable en z_0, le fait que $Df(z_0)$ soit $\mathbb{C}$-linéaire est équivalent à, en posant $z_0 = (x_0; y_0)$,*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{1.21}$$

Ces deux égalités s'appellent les conditions de Cauchy-Riemann en z_0. Lorsque la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0, $Df(z_0)$ est la multiplication par $f'(z_0)$,

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{1.22}$$

et la matrice de $Df(z_0)$ dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ vérifie

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0; y_0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0; y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0; y_0) & \frac{\partial P}{\partial x}(x_0; y_0) \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Démonstration. On a vu que f est holomorphe en z_0 si et seulement si (1.19) est valide pour un certain $\ell \in \mathbb{C}$. D'après (1.1) dans la définition 1.20, f est holomorphe en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 et $Df(z_0)$ est la multiplication par ℓ. Par la proposition 1.1, on en déduit que f est holomorphe en z_0 si et seulement si f est différentiable en z_0 et $Df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
Dans le cas où f est holomorphe en z_0, sa différentielle en z_0 est la multiplication par $f'(z_0)$ sur $\mathbb{C}$ donc, par la proposition 1.1, on en déduit (1.22) et (1.23). □

Remarque 1.16. *Retour sur des exemples et contre-exemples simples précédents (voir la remarque 1.13 et l'exemple 1.9).*
D'après l'exemple 1.4, on voit que $z \mapsto z$ est holomorphe puisqu'elle est différentiable et la matrice de sa différentielle dans la base canonique a la forme adéquate, d'après la proposition 1.28. Il en est de même de toute fonction constante. Toujours grâce à l'exemple 1.4, on retrouve le fait que la conjugaison complexe, la fonction partie réelle et la fonction partie imaginaire sont nulle part holomorphes puisque la matrice dans la base canonique de leur différentielle n'a pas la forme adéquate.
Quant à la fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(z) = |z|^2$, elle est partout différentiable et la matrice de $Df(z)$ est

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 1.28, f n'est holomorphe qu'en $z = 0$.

Pour repérer les fonctions holomorphes sur un ouvert, le résultat suivant sera utile.

Proposition 1.29. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est C^1_h sur Ω si et seulement si les applications composantes P et Q sont de classe C^1 (comme fonctions réelles de deux variables réelles) sur Ω et les conditions (1.21) de Cauchy-Riemann sont remplies en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω.*

Remarque 1.17. *On verra plus loin que "f est C^1_h sur Ω" est équivalent à "f holomorphe sur Ω". Pour l'instant, on sait seulement que la première propriété implique la seconde.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que, si $w \in \mathbb{C}$ et L_w est la multiplication sur $\mathbb{C}$ par w, alors la norme d'opérateur $\|L_w\|_{op}$ de L_w (cf. (1.3)) vérifie $\|L_w\|_{op} = |w|$ $(*)$.
Supposons f de classe C^1_h sur Ω. Elle est donc holomorphe sur Ω. D'après la proposition 1.28, elle est différentiable sur Ω et sa différentielle est l'application $Df : \Omega \ni z \mapsto L_{f'(z)} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Comme f' est continue par hypothèse, Df est aussi continue, d'après $(*)$. En particulier, les dérivées partielles premières de P et Q existent et sont continues sur Ω (cf. L2). Enfin, par la proposition 1.28, (1.21) est valable en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω.
Réciproquement, supposons que P et Q sont C^1 sur Ω et que (1.21) est valable en tout point $(x_0; y_0)$ de Ω. Par le cours de L2, f est différentiable et sa différentielle est continue sur Ω. Puisque (1.21) est valable sur Ω, f est holomorphe en tout point de Ω, par la proposition 1.28.

En particulier, pour tout $z \in \Omega$, $Df(z)$ est la multiplication par $f'(z)$. La continuité de Df et $(*)$ donne la continuité de f'. $\square$

On introduit quelques notations.

Définition 1.33. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable en z_0. Les vecteurs colonnes de la matrice (1.2) (ou (1.23)) sont notés*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,,$$

respectivement. On pose aussi

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \ := \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ - \ i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) \quad et \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \ := \ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ + \ i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Cela permet de réexprimer les résultats de la proposition 1.28 de la façon suivante :
Si f est holomorphe en z_0 alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ = \ -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \ = \ f'(z_0)\,, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \ = \ f'(z_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \ = \ 0\,.$$

On suppose que f est différentiable en z_0. Si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \ = \ -i\,\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \ = \ 0\,,$$

alors f est holomorphe en z_0 et

$$f'(z_0) \ = \ \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,.$$

Remarque 1.18. *Les conditions de Cauchy-Riemann peuvent paraitre anodines au premier abord mais ont en fait de grosses conséquences. Si une fonction f est holomorphe alors il y a un lien très fort entre ses parties réelles et imaginaires (c'est ce que disent les conditions de Cauchy-Riemann). On peut par exemple montrer (voir TD) que si une fonction holomorphe sur un domaine Ω est à valeurs réelles (sa partie imaginaire est donc constante égale à zéro) alors cette fonction est constante.*

CHAPTER 2

FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE SÉRIE ENTIÈRE.

Les seuls exemples de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables qu'on a vus jusqu'ici sont ceux des fonctions polynômes et des quotients de fonctions polynômes. Afin d'enrichir cette "collection" de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables l'étape naturelle suivante est d'essayer les polynômes de "degré infini", autrement dit les fonctions définies par des séries entières.

2.1 Séries entières.

Définition 2.1. *On appelle série entière toute série de fonctions de la variable complexe z de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.*

Proposition 2.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On pose*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &:= \left\{r \in \mathbb{R}^+ ;\ \forall\, r' \in [0; r[\,,\ \sum a_n z^n \text{ converge normalement sur } D(0; r']\right\}, \\ \mathcal{E}_2 &:= \left\{r \in \mathbb{R}^+ ;\ (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\}, \end{aligned}$$

$R_1 = \sup \mathcal{E}_1$ et $R_2 = \sup \mathcal{E}_2$. Alors, avec la convention $[0; R] = \mathbb{R}^+$, si $R = +\infty$, $\mathcal{E}_1$ est l'intervalle $[0; R_1]$ de $\mathbb{R}$, $\mathcal{E}_2$ contient l'intervalle $[0; R_2[$ et $R_1 = R_2$.

Définition 2.2. *On appelle la quantité $R := R_1 = R_2$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, noté $RC(\sum a_n z^n)$. Avec la convention $D(0; R[= \mathbb{C}$, si $R = +\infty$, le disque ouvert $D(0; R[$ est appelé disque de convergence de la série entière.*

Corollaire 2.1. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence.*

1. *Si la série $\sum a_n z^n$ converge pour un $z \in \mathbb{C}$ alors $R \geq |z|$.*
2. *Si la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée pour $z \in \mathbb{C}^*$ alors $R \leq |z|$.*
3. *Si la série $\sum a_n z^n$ diverge pour un $z \in \mathbb{C}$ alors $R \leq |z|$.*
4. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc converge.*

5. *Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, c'est-à-dire que le terme général ne tend pas vers* 0.

6. *Soit K un compact inclus dans le disque de convergence, i.e. tel que $K \subset D(0; R[$. Alors la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur K, i. e.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in K} \left| a_n z^n \right| \; < \; +\infty \,.$$

Remarque 2.1. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$. Les points 4 et 5 du corollaire 2.1 montrent que la série ne peut converger que pour $|z| \leq R$ et qu'elle converge si $|z| < R$. Cela justifie la terminologie de rayon de convergence.*

Démonstration de la proposition 2.1. Tout d'abord, on voit que 0 appartient à $\mathcal{E}_1$ et à $\mathcal{E}_2$. En particulier, les bornes supérieures considérées sont bien définies.
Cas où $R_1 = 0$. On a $[0; R_1] = \{0\} \subset \mathcal{E}_1$. Comme $R_1 = 0$, $\mathcal{E}_1$ ne peut contenir un nombre strictement positif donc $\mathcal{E}_1 \subset \{0\}$. D'où $[0; R_1] = \{0\} = \mathcal{E}_1$.
Cas où $R_1 > 0$. Soit $r_1 \in \mathcal{E}_1$ avec $r_1 > 0$ et $r_2 \in]0; r_1]$. Comme tout réel $r' \in [0; r_2[$ vérifie $r' \in [0; r_1[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r']$, puisque $r_1 \in \mathcal{E}_1$. Cela montre que $r_2 \in \mathcal{E}_1$ et donc que $]0; r_1] \subset \mathcal{E}_1$. Comme $0 \in \mathcal{E}_1$, on a $[0; r_1] \subset \mathcal{E}_1$.
Cas où $R_1 = +\infty$. Par la propriété séquentielle de la borne supérieure R_1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n \in (]n; +\infty[\cap \mathcal{E}_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après l'argument précédent, $[0; n] \subset [0; r_n] \subset \mathcal{E}_1$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[0; +\infty[\subset \mathcal{E}_1$. D'où $\mathcal{E}_1 = [0; +\infty[= \mathbb{R}^+$.
Cas où $0 < R_1 < +\infty$. Soit $r' \in [0; R_1[$. Par la définition de la borne supérieure R_1, il existe $r_1 \in (]r'; R_1[\cap \mathcal{E}_1)$. Comme $r_1 \in \mathcal{E}_1$ et $r' < r_1$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r']$. On a montré que $R_1 \in \mathcal{E}_1$. Par l'argument précédent, $[0; R_1] \subset \mathcal{E}_1$. Par définition de la borne supérieure R_1, on a $\mathcal{E}_1 \subset [0; R_1]$ donc $\mathcal{E}_1 = [0; R_1]$.
Cas où $R_2 = 0$. On a $[0; R_2[= \emptyset \subset \mathcal{E}_2$.
Cas où $R_2 > 0$. Soit $r \in [0; R_2[$. Par définition de la borne supérieure R_2, il existe un $r_2 \in (]r; +\infty[\cap \mathcal{E}_2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|a_n r^n| = |a_n r_2^n| \cdot |r/r_2|^n \leq |a_n r_2^n| \leq \sup |a_p r_2^p| < +\infty$, puisque $r_2 \in \mathcal{E}_2$. Donc $(a_n r^n)_n$ est bornée et $r \in \mathcal{E}_2$. Donc $[0; R_2[\subset \mathcal{E}_2$.
Il reste à montrer que $R_1 = R_2$.
Cas où $R_2 = 0$. Supposons qu'on ait un $r > 0$ tel que $r \in \mathcal{E}_1$. Pour $r' \in]0; r[$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r']$. En particulier, $\sum a_n (r')^n$ converge absolument donc converge. Le terme général $a_n (r')^n$ tend donc vers 0 et la suite $(a_n (r')^n)_n$ est forcément bornée. D'où $r' \in \mathcal{E}_2$. Contradiction puisque $r' > 0$ et $R_2 = \sup \mathcal{E}_2 = 0$. On a montré que $\mathcal{E}_1 = \{0\}$ donc que $R_1 = 0 = R_2$.
Cas où $R_2 > 0$. Soit $r \in \mathcal{E}_2$ avec $r > 0$. Soit $r' \in [0; r[$. Soit $z \in D(0; r']$. Pour tout n, on a $|a_n z^n| = |a_n r^n| (|z|/r)^n \leq |a_n r^n| (r'/r)^n$. Donc, pour $N \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{z \in D(0; r']} \left| a_n z^n \right| \;\leq\; \sum_{n=0}^{N} \left| a_n r^n \right| \cdot \left(\frac{r'}{r} \right)^n \;\leq\; \left(\sup_{p \in \mathbb{N}} |a_p r^p| \right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{r'}{r} \right)^n .$$

Comme $0 < r'/r < 1$, la série géométrique de raison r'/r converge donc la suite de ses sommes partielles est bornée. Comme $r \in \mathcal{E}_2$, $\sup_p |a_p r^p| < +\infty$. Donc, par les inégalités précédentes, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r']$. Cela prouve que $r \in \mathcal{E}_1$. On a montré que $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1$ donc $R_1 \geq R_2 > 0$.

Prenons $r_2 \in [0; R_1[$ et $r \in]r_2; R_1[$. Comme $[0; R_1[\subset \mathcal{E}_1$, $r \in \mathcal{E}_1$. Par définition de $\mathcal{E}_1$ et par le fait que $r_2 < r$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; r_2]$. En particulier, la série $\sum a_n r_2^n$ converge absolument donc converge. Son terme général tend vers 0 donc la suite $(a_n r_2^n)_n$ est bornée. D'où $r_2 \in \mathcal{E}_2$. On a montré que $[0; R_1[\subset \mathcal{E}_2$ donc $R_2 \geq R_1$.
Conclusion : $R_1 = R_2$. □

Démonstration du corollaire 2.1.

1. On suppose que $\sum a_n z^n$ pour un $z \in \mathbb{C}$. Le terme général de la série tend donc vers 0 ce qui implique que la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée. D'où $|z| \in \mathcal{E}_2$. Par la proposition 2.1, $R \geq |z|$.

2. On suppose que la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée pour $z \in \mathbb{C}^*$. Donc $|z| \notin \mathcal{E}_2$. Comme $[0; R[\subset \mathcal{E}_2$, $|z| \notin [0; R[$ donc $|z| \geq R$.

3. On suppose que $\sum a_n w^n$ diverge pour un $w \in \mathbb{C}$. Si l'on avait $|w| < R = \sup \mathcal{E}_1$ alors il existerait $r > |w|$ tel que $r \in \mathcal{E}_1$. On aurait alors la convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur $D(0; |w|]$ donc, en particulier, la convergence absolue et donc la convergence de $\sum a_n w^n$. Contradiction. Donc $|w| \geq R$.

4. Soit $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| < R = \sup \mathcal{E}_1$. Donc il existe $r \in \mathcal{E}_1$, tel que $r > |w|$, et la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; |w|]$ donc, en particulier, $\sum a_n w^n$ converge absolument.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R = \sup \mathcal{E}_2$. On a alors $|z| \notin \mathcal{E}_2$ donc la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée. Elle ne peut donc pas converger vers 0.

6. Comme la fonction module est continue, $\sup_K |\cdot|$ est finie et est atteinte dans K. Il existe donc $z_0 \in K$ tel que $\sup_K |\cdot| = |z_0|$. En particulier, $K \subset D(0; |z_0|]$. Pour tout n, on a donc
$$\sup_{z \in K} \left| a_n z^n \right| \leq \sup_{z \in D(0;|z_0|]} \left| a_n z^n \right|. \tag{2.1}$$
Comme $K \subset D(0; R[$ et $z_0 \in K$, on a $|z_0| < R$. Comme $R \in \mathcal{E}_1$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D(0; |z_0|]$, et, par (2.1), sur K. □

Pour déterminer dans la pratique le rayon de convergence d'une série entière, on pourra utiliser le corollaire 2.1 mais aussi les trois résultats suivants, qui sont basés sur les règles de D'Alembert et Cauchy pour les séries, vues en L2.

Proposition 2.2 (Règle de D'Alembert). *On considère la série entière $\sum a_n z^n$ et on suppose que $a_n \neq 0$, pour n assez grand. Si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Proposition 2.3 (Règle de Cauchy). *On considère la série entière $\sum a_n z^n$. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$, avec la convention $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$.*

Remarque 2.2. *Une variante de la règle de Cauchy donne la formule de Cauchy-Hadamard suivante :*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

toujours avec la convention $R = 0$ si la limite supérieure est $+\infty$ et $R = +\infty$ si la limite supérieure est 0. On **admet** *ce résultat.*

Démonstration des propositions 2.2 et 2.3. On suppose que a_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour n assez grand,

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \times |z| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell|z| ,$$

avec la convention $\ell|z| = +\infty$, si $\ell = +\infty$. D'après la règle de D'Alembert pour les séries numériques, $\sum a_n z^n$ converge pour les $z \neq 0$ tels que $\ell|z| < 1$ (aussi pour $z = 0$) et diverge pour les $z \neq 0$ tel que $\ell|z| > 1$.
Cas où $\ell = +\infty$. La série diverge pour $z \neq 0$ donc, par le corollaire 2.1, $0 \leq R \leq |z|$, pour tout $z \neq 0$. En prenant la limite $z \to 0$ dans les inégalités précédentes, on obtient $R = 0$ qui est bien $1/\ell$, d'après la convention.
Cas où $\ell = 0$. La série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc, par le corollaire 2.1, $R = +\infty$ qui est bien $1/\ell$, d'après la convention.
Cas où $0 < \ell < +\infty$. La série converge pour tout z tel que $|z| < (1/\ell)$. Par le corollaire 2.1, $R \geq |z|$, pour tous ces z, donc $R \geq \sup\,[0; 1/\ell[$ soit $R \geq 1/\ell$. La série diverge pour tout les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\ell|z| > 1$ donc, par le corollaire 2.1, $R \leq |z|$, pour tous ces z, d'où $R \leq \inf\,]1/\ell\,; +\infty[$ soit $R \leq 1/\ell$. Conclusion : $R = 1/\ell$.
Passons à la règle de Cauchy. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell|z| ,$$

avec la convention $\ell|z| = +\infty$, lorsque $\ell = +\infty$. D'après la règle de Cauchy pour les séries numériques, $\sum a_n z^n$ converge pour les z tels que $\ell|z| < 1$ (pour aucun $z \neq 0$, si $\ell = +\infty$) et diverge pour les z tels que $\ell|z| > 1$ (pour tous les $z \neq 0$, si $\ell = +\infty$). On se retrouve dans la même situation qu'après l'application de la règle de D'Alembert donc l'argument précédent donne encore $R = 1/\ell$. □

Exemple 2.1. *En appliquant la règle de D'Alembert de la proposition 2.2, on vérifie que les séries entières $\sum z^n$, $\sum z^n/n^2$ et $\sum z^n/n$ ont toutes les trois 1 pour rayon de convergence. Il a été montré en L1 que la série géométrique $\sum z^n$ diverge pour tout $z \in C(0;1)$.*
Comme la série numérique $\sum 1/n^2$ converge, la série entière $\sum z^n/n^2$ converge normalement sur $D(0;1]$. En particulier, elle converge absolument donc converge pour tout $z \in C(0;1)$.
On peut montrer que la série $\sum z^n/n$ converge pour tout $z \in C(0;1)\setminus\{1\}$ mais qu'elle diverge pour $z = 1$.
Ceci explique pourquoi les résultats précédents sont muets sur l'éventuelle convergence de la série entière sur le cercle de convergence $C(0;R)$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} \sup_{z\in D(0;1[} |z^n| = \sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1 \to +\infty$$

quand $N \to +\infty$. Donc la série $\sum z^n$ ne converge pas normalement sur $D(0;1[$.

Les propriétés générales suivantes s'intéressent à la somme et au produit de séries entières.

Proposition 2.4. *Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b, et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit f (resp. g) la somme de $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) sur $D(0;R_a[$ (resp. $D(0;R_b[$). Alors le rayon de convergence R de $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et, si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min\{R_a;R_b\}$. Sur $D(0;\min\{R_a;R_b\}[$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+\lambda b_n)z^n \;=\; f(z)+\lambda g(z)\,. \tag{2.2}$$

Démonstration. Prenons $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Par le corollaire 2.1, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent donc, d'après les opérations sur les limites de suites, la série de terme général $(a_n+\lambda b_n)z^n = a_n z^n + \lambda b_n z^n$ converge et on a (2.2). Cela prouve, par le corollaire 2.1, que $R \geq |z|$. Comme c'est vrai pour tout $|z| < \min\{R_a;R_b\}$, on en déduit que $R \geq \sup[0;\min\{R_a;R_b\}[= \min\{R_a;R_b\}$.
Supposons $R_a \neq R_b$.
Cas où $R_a < R_b$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Par le corollaire 2.1, la série $\sum a_n z^n$ diverge tandis que $\sum b_n z^n$ converge. Si $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ convergeait alors, par différence et produit, $\sum a_n z^n = \sum(a_n+\lambda b_n)z^n - \lambda\sum b_n z^n$ convergerait. Contradiction. Donc la série entière$\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ diverge et, par le corollaire 2.1, $R \leq |z|$. Donc $R \leq \inf]R_a;R_b[= R_a = \min\{R_a;R_b\}$.
Cas où $R_a > R_b$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_b < |z| < R_a$. Par le corollaire 2.1, la série $\sum b_n z^n$ diverge tandis que $\sum a_n z^n$ converge. Si $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ convergeait alors, par différence et quotient, $\sum b_n z^n = (\sum(a_n+\lambda b_n)z^n - \sum a_n z^n)/\lambda$ convergerait. Contradiction. Donc la série entière$\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ diverge et, par le corollaire 2.1, $R \leq |z|$. Donc $R \leq \inf]R_b;R_a[= R_b = \min\{R_a;R_b\}$. □

Remarque 2.3. *Dans le cadre de la proposition 2.4, on a :*

1. *Lorsque $\lambda = 0$, la série entière $\sum(a_n+\lambda b_n)z^n$ est égale à $\sum a_n z^n$ donc son rayon de convergence est R_a.*

2. *Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = 1$ et $\lambda = -1$, alors $R_a = R_b = 1$ et, comme $a_n - b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R = +\infty$.*

3. *Si $|z| > R_a$, la formule (2.2) n'a pas de sens, même si $|z| < R$, car $f(z)$ n'est pas défini dans ce cas.*

Afin d'étudier le produit de séries entières on aura besoin du résultat suivant.

Proposition 2.5. *Soit $(\alpha_n)_n, (\beta_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ soient absolument convergentes. Alors la série de terme général*

$$\gamma_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}$$

est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right). \tag{2.3}$$

La série $\sum \gamma_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$.

Remarque 2.4. *Si seulement l'une des deux séries $\sum \alpha_n$ ou $\sum \beta_n$ est absolument convergente et que l'autre est convergente mais pas absolument alors on peut montrer que $\sum \gamma_n$ est convergente (mais pas absolument) et que (2.3) reste vraie. Si, par contre, aucune des deux séries $\sum \alpha_n$ et $\sum \beta_n$ n'est supposée absolument convergente, tout en étant toutes les deux convergentes, il se peut que la série $\sum \gamma_n$ diverge.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant l'inégalité triangulaire puis l'inversion des sommes sur k et n,

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \;\leq\; \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}|\right) \;=\; \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}|\,.$$

Or, en utilisant un décalage d'indice, on a

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=k}^{N} |\alpha_k| \times |\beta_{n-k}| \;=\; \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k| \times \sum_{n=k}^{N} |\beta_{n-k}|\right) \;=\; \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j|\right).$$

On en déduit, en utilisant le fait que les termes sont positifs, que

$$\sum_{n=0}^{N} |\gamma_n| \;\leq\; \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{N-k} |\beta_j|\right) \;\leq\; \sum_{k=0}^{N}\left(|\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|\right) \;\leq\; \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \times \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|\,.$$

La suite des sommes partielles $(\sum_{0\leq n\leq N} |\gamma_n|)_N$ est donc bornée. On en déduit que la série $\sum |\gamma_n|$ converge (car c'est une série à termes positifs).
On montre maintenant (2.3). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n\right) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_n\right| &= \left|\sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n\beta_m - \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{k} \alpha_n\beta_{k-n}\right| \\
&= \left|\sum_{n,m=0}^{N} \alpha_n\beta_m - \sum_{k=0}^{N}\sum_{\substack{0\leq n,m\leq N\\ n+m=k}} \alpha_n\beta_m\right| \\
&= \left|\sum_{0\leq n,m\leq N} \alpha_n\beta_m - \sum_{\substack{0\leq n,m\leq N\\ n+m\leq N}} \alpha_n\beta_m\right| = \left|\sum_{\substack{0\leq n,m\leq N\\ n+m>N}} \alpha_n\beta_m\right|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que les termes sont positifs, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n\right) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_n\right| &\leq \sum_{\substack{0\leq n,m\leq N\\ n+m>N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| \\
&\leq \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}\\ n+m>N}} |\alpha_n| \times |\beta_m| \;=\; \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}|.
\end{aligned}$$

Le membre de droite est le reste d'ordre N de la série de terme général

$$u_k = \sum_{n=0}^{k} |\alpha_n| \times |\beta_{k-n}| \,.$$

Comme les séries $\sum |\alpha_n|$ et $\sum |\beta_n|$ convergent (absolument), d'après la première partie de la preuve, la série $\sum u_k$ converge (absolument) donc son reste tend vers 0. Par le théorème des gendarmes, on obtient donc

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} \beta_n\right) - \sum_{n=0}^{N} \gamma_n = 0,$$

et, comme les trois séries $\sum \alpha_n$, $\sum \beta_n$ et $\sum \gamma_n$ convergent, cela prouve (2.3). $\square$

Proposition 2.6. *Soit $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon de convergence R_a (resp. R_b) et de somme f (resp. g). Pour $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$c_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \,.$$

Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min\{R_a; R_b\}$ et on a, sur le disque $D(0; \min\{R_a; R_b\}[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \;=\; f(z) \times g(z)\,. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. D'après le corollaire 2.1, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent absolument donc on peut appliquer la Proposition 2.5. On en déduit que la série de terme général

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = c_n z^n$$

converge et vérifie (2.4). De plus, par le corollaire 2.1, $R \geq |z|$. Ceci étant valable pour tout $z \in D(0; \min\{R_a; R_b\}[$, on a $R \geq \sup[0; \min\{R_a; R_b\}[= \min\{R_a; R_b\}$. $\square$

La question naturelle suivante est celle de la $\mathbb{C}$-dérivabilité des sommes de série entière.

Proposition 2.7. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série entière $\sum (p+1) a_{p+1} z^p$ a pour rayon de convergence R. De plus, si $R > 0$, la somme f de la série entière, qui est définie sur $D(0; R[$, par*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \,,$$

est holomorphe sur $D(0; R[$ et on a, pour tout $z \in D(0; R[$,

$$f'(z) \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)\, a_{p+1}\, z^p \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}\,. \tag{2.5}$$

En raisonnant par récurrence, on en déduit le résultat important suivant.

Corollaire 2.2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Sa somme f est une fonction infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $D(0;R[$, i.e. $f \in C_h^\infty$ sur $D(0;R[$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in D(0;R[$, on a*

$$f^{(k)}(z) \;=\; \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n\, z^{n-k}\,. \tag{2.6}$$

En particulier, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,. \tag{2.7}$$

Pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq n$, on note que

$$\frac{n!}{(n-k)!} \;=\; \prod_{p=0}^{k-1} (n-p) \;=\; n(n-1)\cdots(n-k+1)\,.$$

Démonstration de la proposition 2.7. Soit R' le rayon de convergence de la série entière $\sum(p+1)a_{p+1}z^p = \sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$.
Soit $r > R$. Par la proposition 2.1, la suite $(a_n r^n)_n$ n'est pas bornée. Si la suite $(|na_n r^{n-1}|)_{n\geq 1}$ était majorée par un $M \in \mathbb{R}^+$, on aurait, pour $n \geq 1$,

$$\bigl|a_n\, r^n\bigr| \;=\; \frac{r}{n}\bigl|n\, a_n\, r^{n-1}\bigr| \;\leq\; \frac{Mr}{n} \;\leq\; M\, r \;<\; +\infty$$

et la suite $(|a_n r^n|)_n$ serait majorée par le $\max(|a_0|; Mr)$. Contradiction. Donc $(na_n r^{n-1})_{n\geq 1}$ n'est pas bornée et, par le corollaire 2.1, $R' \leq r$. Donc $R' \leq \inf\,]R; +\infty[= R$, d'où $R' \leq R$.
Si $R = 0$, cela prouve que $R' = 0$. On suppose désormais que $R > 0$.
Soit $r \in [0; R[$ et $r' \in]r; R[$. La suite $(n(r/r')^n)_n$ est positive et décroissante à partir du rang $1 + E(r/(r'-r))$ (où $E(a)$ désigne la partie entière du réel a) donc elle est majorée. Pour $n \geq 1$, on a

$$\bigl|n\, a_n\, r^{n-1}\bigr| \;=\; \frac{1}{r}\cdot n\left(\frac{r}{r'}\right)^n \cdot \bigl|a_n\,(r')^n\bigr| \;\leq\; \frac{1}{r}\cdot\left(\sup_{p\in\mathbb{N}} p\left(\frac{r}{r'}\right)^p\right)\cdot\bigl|a_n\,(r')^n\bigr|\,.$$

Comme $r' < R$, la série $\sum a_n(r')^n$ converge absolument (cf. corollaire 2.1), on a donc, par comparaison, la convergence absolue, donc la convergence, de la série $\sum_{n\geq 1} na_n r^{n-1}$.
Toujours grâce au corollaire 2.1, $R' \geq r$. On a donc $R' \geq \sup\,[0; R[= R$.
On a donc montré que $R' = R$.
En appliquant le résultat précédent à la série entière $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$, on obtient que R est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n z^{n-2}$.
On note par F la somme de la $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$. Prenons $z_0 \in D(0;R[$. On montre que f est holomorphe en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $F(z_0)$.
Soit $r \in]0; R - |z_0|[$. On a $D(z_0;r] \subset D(0;R[$. Pour $z \in D(z_0;r]$, soit $g(z) = f(z) - f(z_0) - (z-z_0)F(z_0)$. Pour $n \geq 1$, la fonction $[0;1] \ni t \mapsto (tz + (1-t)z_0)^n$ vaut z_0^n en 0, z^n en 1 et

est C^1 de dérivée $[0;1] \ni t \mapsto n(tz+(1-t)z_0)^{n-1}(z-z_0)$ (*) donc

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z^n - z_0^n\right) - (z - z_0)\,F(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n - z_0^n\right) - (z - z_0)\,F(z_0) \\ &= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \int_0^1 \left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1} \mathrm{d}t - (z - z_0)\,F(z_0) \\ &= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \left(\int_0^1 \left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1} \mathrm{d}t - z_0^{n-1}\right) \\ &= (z - z_0)\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n \int_0^1 \left(\left(tz + (1-t)z_0\right)^{n-1} - z_0^{n-1}\right) \mathrm{d}t \\ &= (z - z_0)^2\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,a_n \int_0^1\int_0^1 \left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

en utilisant encore la propriété (*) et en posant $z_t = tz + (1-t)z_0$.
Comme $D(z_0;r]$ est convexe, on a, pour tout $t \in [0;1]$, $z_t \in D(z_0;r]$ et $sz_t + (1-s)z_0 \in D(z_0;r]$. Donc, pour tout $n \geq 2$,

$$\sup_{z\in D(z_0;r]}\ \sup_{t\in[0;1]}\ \sup_{s\in[0;1]} \left|n\,(n-1)\,a_n\left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2}\right| \leq \sup_{w\in D(z_0;r]} \left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right|. \tag{2.9}$$

Donc, pour $z \in D(z_0;r]$, on déduit de (2.8), en utilisant l'inégalité triangulaire, la continuité du module et (2.9),

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq |z - z_0|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,|a_n| \left|\int_0^1\int_0^1 \left(sz_t + (1-s)z_0\right)^{n-2} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq |z - z_0|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,|a_n| \int_0^1\int_0^1 \left|sz_t + (1-s)z_0\right|^{n-2} \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\leq |z - z_0|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^1\int_0^1 \sup_{w\in D(z_0;r]} \left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\leq |z - z_0|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \sup_{w\in D(z_0;r]} \left|n\,(n-1)\,a_n\,w^{n-2}\right|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Comme $r < R$ et R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n w^{n-2}$, celle-ci converge normalement sur $D(z_0;r]$ (cf. proposition 2.1). Donc (2.10) montre que $g(z) = o(|z-z_0|)$ sur $D(z_0;r]$ et que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $F(z_0)$. □

Remarque 2.5. *Par analogie avec les formules de Taylor pour une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^∞, la série entière $\sum a_n z^n$ s'appelle la série de Taylor en 0 de f, puisque les a_n vérifient* (2.7).

Dans tout ce qu'on a fait, on a considéré des séries entières "centrées en 0". Si $z_0 \in \mathbb{C}$, on peut de façon analogue considérer des séries entières "centrées en z_0", i.e. de la forme $\sum a_n(z-z_0)^n$. En remplaçant 0 par z_0 et chaque z^n par $(z-z_0)^n$, on récupère tous les

résultats précédents de la présente partie.
En particulier, si $R > 0$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ alors sa somme f est C_h^∞ sur $D(z_0; R[$ et on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,. \tag{2.11}$$

On a donc une façon de retrouver les coefficients a_n à partir des $\mathbb{C}$-dérivées de f. Pour ce faire, il se trouve que l'on dispose d'un autre moyen en utilisant seulement la fonction f et des intégrales de le long d'un chemin, comme on va le voir maintenant.
Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note par f sa somme, qui est définie et holomorphe sur $D(z_0; R[$. En particulier, elle y est continue. Pour $r \in]0; R[$, soit $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_{z_0;r}(t) = z_0 + re^{it}$. Il s'agit d'un lacet de classe C^1 dont l'image est $C(z_0; r)$ (cf. corollaire 2.4). Que peut-on dire de

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} f(w)\,\mathrm{d}w\,?$$

C'est nul ! car le chemin $\gamma_{z_0;r}$ est fermé et f admet comme primitive sur $D(0; R[$ la somme de la série entière $\sum a_n(z-z_0)^{n+1}/(n+1)$ (cf. proposition 2.7). On peut retrouver ce résultat de la façon suivante.
Comme $r \in]0; R[$, le compact $C(z_0; r)$ est inclus dans $D(z_0; R[$ donc, par le corollaire 2.1, la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur $C(z_0; r)$. D'après la proposition 1.24, on a donc

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(w-z_0)^n\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^n\,\mathrm{d}w\,.$$

Chaque terme de la dernière série est nul car les fonctions $w \mapsto (w-z_0)^n$ ont toutes une primitive et le chemin est fermé.
La situation serait différente si l'on avait un terme contenant $(w-z_0)^{-1}$ car

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}w \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}}\, rie^{it}\,\mathrm{d}t \;=\; 2i\pi\,.$$

Cela nous incite à considérer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{1+p}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Pour pouvoir permuter l'intégrale et la série, on vérifie que la série $\sum a_n(w-z_0)^{n-1-p}$ de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0; r)$: on a

$$\sup_{w\in C(z_0;r)} \left|a_n\,(w-z_0)^{n-1-p}\right| \;=\; |a_n|\, r^{n-1-p} \;=\; \frac{1}{r^{1+p}}\left|a_n\, r^n\right|.$$

Comme $r < R$, la série $\sum a_n r^n$ converge absolument (cf. corollaire 2.1) donc, par comparaison, on a la convergence normale sur $C(z_0; r)$ de $\sum a_n(w-z_0)^{n-1-p}$.

D'après la proposition 1.18, on a donc, en utilisant le fait que $\gamma_{z_0;r}$ est fermé et le fait que, pour $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $w \mapsto (w-z_0)^m$ admet une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$,

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{1+p}}\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z_0)^{n-1-p}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^{n-1-p}\,\mathrm{d}w$$
$$= a_p \int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^{-1}\,\mathrm{d}w \,+\, 0 \;=\; 2i\pi\, a_p\,.$$

On a montré la

Proposition 2.8. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soit $\sum a_n(z-z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $r \in]0;R[$, soit $\gamma_{z_0;r} : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_{z_0;r}(t) = z_0 + re^{it}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction*

$$]0;R[\, \ni r \;\mapsto\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\big(z_0 + re^{it}\big)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t \qquad (2.12)$$

est constante égale à a_n.

Dans le cadre de cette proposition 2.8, on remarque que

$$f(z_0) \;=\; a_0 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0}\,\mathrm{d}w\,.$$

On peut donc retrouver la valeur de f au centre du disque $D(z_0;R[$ en intégrant $w \mapsto f(w)/(w-z_0)$ sur le long du bord de n'importe quel disque $D(z_0;r[$, pour $r \in]0;R[$ (formule de la moyenne). Peut-on retrouver d'autres valeurs ? Oui, comme le montre la

Proposition 2.9. *Dans le cadre de la proposition 2.8, soit $z \in D(z_0;R[$. Alors, pour tout $r \in]|z-z_0|;R[$, on a $z \in D(z_0;r[$ et*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0+re^{it}\big)}{z_0+re^{it}-z}\, e^{it}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (2.13)$$

En particulier, si $a_0 = 1$ et $a_n = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, alors le rayon de convergence de la série entière correspondante est infini, f est constante égale à 1 sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $r > 0$ et tout $z \in D(z_0;r[$,

$$1 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z_0+re^{it}-z}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (2.14)$$

Enfin, pour tout $r > 0$ et tout $z \in (\mathbb{C} \setminus D(z_0;r])$, on a

$$0 \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{z_0+re^{it}-z}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (2.15)$$

Démonstration. Soit $z \in D(z_0;R[$ et $r \in]|z-z_0|;R[$. On a bien $z \in D(z_0;r[$. D'après (2.12), on a

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n \;=\; \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,. \qquad (2.16)$$

Comme, pour $w \in C(z_0;r)$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \;\leq\; \left(\sup_{w'\in C(z_0;r)} |f(w')|\right)\,\frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}}\,,$$

on a

$$\sup_{w\in C(z_0;r)} \left|\frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \;\leq\; \frac{1}{r}\left(\sup_{w\in C(z_0;r)} |f(w)|\right)\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n . \tag{2.17}$$

Comme $|z-z_0|<r$, la série géométrique $\sum((z-z_0)/r)^n$ converge donc la série

$$\sum \frac{f(w)\,(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0;r)$. D'après la proposition 1.24,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n \mathrm{d}w \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

On a montré (2.13) et (2.14).
On suppose désormais que $a_0=1$ et $a_n=0$, pour $n\in\mathbb{N}^*$, et on montre (2.15).
Soit $r>0$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z-z_0|>r$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z_0+z_0-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{1}{2i\pi(z_0-z)}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}\,\mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{2i\pi(z_0-z)}\int_{\gamma_{z_0;r}} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{w\in C(z_0;r)} \left|\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\right| \;\leq\; \left(\frac{r}{|z-z_0|}\right)^n .$$

Comme $r<|z-z_0|$, la série géométrique $\sum(r/(z-z_0))^n$ converge donc, par comparaison, la série $\sum(w-z_0)^n/(z-z_0)^n$ de fonctions de w converge normalement sur $C(z_0;r)$. Par la proposition 1.24, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{1}{2i\pi(z_0-z)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^n}\int_{\gamma_{z_0;r}} (w-z_0)^n\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,,$$

puisque chaque fonction $w\mapsto(w-z_0)^n$ admet une primitive et le chemin $\gamma_{z_0;r}$ est fermé. $\square$

Remarque 2.6. *Les formules* (2.13), (2.14) *et* (2.15) *sont des formules de Cauchy. On en verra des versions plus générales par la suite.*

2.2 La fonction exponentielle complexe.

Parmi toutes les fonctions définies par une série entière, l'une des plus importantes, si ce n'est la plus importante, est certainement la fonction exponentielle complexe.

Définition-Proposition 2.3. *La série entière*

$$s \ := \ \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

a pour rayon de convergence $R = +\infty$. Sa somme est appelée fonction exponentielle et est notée exp. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $\exp(z)$ aussi par e^z.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de D'Alembert. □

Définition 2.4. *Les fonctions cosinus* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et sinus* $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *sont définies sur $\mathbb{C}$ par*

$$\cos(z) \ = \ \frac{\exp(iz) \ + \ \exp(-iz)}{2} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \,,$$

$$\sin(z) \ = \ \frac{\exp(iz) \ - \ \exp(-iz)}{2i} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \,,$$

respectivement. On a alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.

Remarque 2.7. *Fonctions d'une variable réelle reliées à l'exponentielle complexe.*

1. *Les restrictions à $\mathbb{R}$ des fonctions exponentielle, sinus et cosinus, sont à valeurs réelles car ce sont des sommes de séries entières à coefficients réels.*

2. *La restriction de l'exponentielle complexe à la droite $i\mathbb{R} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$ joue un rôle particulier car, pour $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\cos(t) \ = \ \mathrm{Re}\big(\exp(it)\big)\,, \quad \sin(t) \ = \ \mathrm{Im}\big(\exp(it)\big)\,, \quad \exp(it) \ = \ \cos(t) \ + \ i\sin(t)\,.$$

3. *On définit les fonctions cosinus hyperbolique* $\mathrm{ch} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et sinus hyperbolique* $\mathrm{sh} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *par*

$$\mathrm{ch}(z) \ = \ \frac{\exp(z) \ + \ \exp(-z)}{2}\,, \quad \mathrm{sh}(z) \ = \ \frac{\exp(z) \ - \ \exp(-z)}{2}\,,$$

respectivement. ch *et* sh *sont parfois notées* cosh *et* sinh*, respectivement. Pour $z \in \mathbb{C}$,*

$$\mathrm{ch}(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sh}(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

4. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \mathrm{ch}(iz)$, $\sin(z) = -i\mathrm{sh}(iz)$, $\mathrm{ch}(z) = \cos(iz)$ et $\mathrm{sh}(z) = -i\sin(iz)$. Enfin,* cos *et* ch *sont paires tandis que* sin *et* sh *sont impaires.*

Dans cette partie, on va établir des propriétés de l'exponentielle complexe et retrouver de nombreuses propriétés (plus ou moins admises à l'école et en L1-L2) de l'exponentielle réelle, de cosinus et de sinus. De plus, un nombre strictement positif va apparaître. On le nommera π ("pi"), ce qui correspondra bien à la définition usuelle de π, d'après la remarque 1.12.

Théorème 2.1. *L'exponentielle complexe vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\exp(0) = 1$.
2. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
3. *Pour tous* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.
4. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ *et* $(\exp(z))^{-1} := 1/\exp(z) = \exp(-z)$.
5. *La restriction* $\exp_{|\mathbb{R}}$ *de l'exponentielle complexe à* $\mathbb{R}$*, l'exponentielle réelle, prend des valeurs réelles strictement positives et, pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, on a* $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$.
6. *La fonction* $\exp$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *(donc entière) et sa* $\mathbb{C}$*-dérivée est elle-même, c'est-à-dire, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$*. Les fonctions* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh *sont aussi holomorphes sur* $\mathbb{C}$ *et vérifient, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $\mathrm{ch}'(z) = \mathrm{sh}(z)$ *et* $\mathrm{sh}'(z) = \mathrm{ch}(z)$.
   Ces fonctions sont de classe C_h^∞.
7. *Pour tout* $a \in \mathbb{C}$*, l'application* $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(at)$ *est de classe* C^1 *de dérivée* $\mathbb{R} \ni t \mapsto a\exp(at)$.
8. *La restriction de* $\exp$ *à* $\mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante de classe* C^∞ *de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0; +\infty[$*. De plus,* $(\exp_{|\mathbb{R}})' = \exp_{|\mathbb{R}}$.
9. *L'application* $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ *et les restrictions à* $\mathbb{R}$ *des fonctions* $\cos$, $\sin$, ch *et* sh *sont* C^∞ *et* $\varphi' = i\varphi$, $(\cos_{|\mathbb{R}})' = -\sin_{|\mathbb{R}}$, $(\sin_{|\mathbb{R}})' = \cos_{|\mathbb{R}}$, $(\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}})' = \mathrm{sh}_{|\mathbb{R}}$ *et* $(\mathrm{sh}_{|\mathbb{R}})' = \mathrm{ch}_{|\mathbb{R}}$.
10. *L'application* $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(it)$ *est à valeurs dans* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ *et est surjective. L'ensemble* $\{t \in \mathbb{R}^+;\ \exp(it) = i\}$ *est non vide et admet un minimum* t_0*.* *On définit le nombre* π *par* $\pi = 2t_0$.
11. *Pour* $(t; t') \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \varphi(t')$ *si et seulement si* $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$*. En particulier, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$, φ *est bijective de* $[\theta; \theta + 2\pi[$ *sur* $\mathcal{U}$.
12. *On a* $\exp(i\pi/2) = i$, $\exp(i\pi) = \exp(-i\pi) = -1$, $\exp(2i\pi) = 1 = \exp(0)$.
13. *La fonction* φ *est périodique de période* 2π *et il en est de même des restrictions à* $\mathbb{R}$ *des fonctions* $\cos$ *et* $\sin$.
14. *Pour* $(z; z') \in \mathbb{C}^2$*, on a* $\exp(z) = \exp(z')$ *si et seulement si* $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
15. *La fonction* $\exp$ *est surjective de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}^*$ *et est périodique de période* $2i\pi$.

Corollaire 2.3. *Pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$*, l'ensemble* $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z|\exp(it)\}$ *est infini et s'écrit* $\mathcal{A}_z = \{\alpha + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$*, pour un certain* $\alpha \in \mathbb{R}$*. De plus, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, l'ensemble* $\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi]$ *a exactement un élément.*

Démonstration. Comme $z/|z| \in \mathcal{U}$, il existe, par 10, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\alpha) = z/|z|$. Donc $\alpha \in \mathcal{A}_z$. Soit $\alpha' \in \mathbb{R}$. D'après 11, $\alpha' \in \mathcal{A}_z$ si et seulement $\exp(i\alpha') = z/|z| = \exp(i\alpha)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha' - \alpha = 2k\pi$. Donc $\mathcal{A}_z = \{\alpha + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, qui est bien infini.
Soit $p \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $(\theta + 2\pi - \alpha)/(2\pi)$. On a $p \leq (\theta + 2\pi - \alpha)/(2\pi) < p + 1$ donc $2\pi p \leq \theta + 2\pi - \alpha < 2\pi p + 2\pi$ et, en additionnant $-(\theta + 2\pi + 2p\pi)$, $-\theta - 2\pi \leq -\alpha - 2p\pi < -\theta$. D'où $\theta < \alpha + 2p\pi \leq \theta + 2\pi$ et $\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi]$ contient au moins un élément.
Supposons que $\alpha_1 \in (\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi])$ et $\alpha_2 \in (\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi])$. D'après 11, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$ et, comme $\alpha_2 \in]\theta; \theta + 2\pi]$ et $-\alpha_1 \in [-\theta - 2\pi; -\theta[$,

$$-2\pi \ = \theta \ + \ (-\theta \ - \ 2\pi) \ < \ 2k\pi \ < \ \theta + 2\pi \ + \ (-\theta) \ = \ 2\pi$$

donc $k = 0$ et $\alpha_2 = \alpha_1$. Donc $\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi]$ est un singleton. □

À partir du corollaire 2.3, on introduit la

Définition 2.5. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On dit qu'un élément de $\mathcal{A}_z$ est un argument de z. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]\theta; \theta + 2\pi]$ est noté $\mathrm{Arg}_\theta(z)$. Dans le cas $\theta = -\pi$, l'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]-\pi; \pi]$, à savoir $\mathrm{Arg}_{-\pi}(z)$, est appelé argument principal de z et noté $\mathrm{Arg}(z)$.*

Corollaire 2.4. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $\gamma_\pm : [\theta; \theta + 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{\pm it}$. Alors γ_+ et γ_- sont des lacets de classe C^1 dont l'image est le cercle $C(z_0; r)$.*

Démonstration. Par le point 7 du théorème 2.1, γ_+ et γ_- sont C^1. On a

$$(\gamma_+ \ - \ z_0)/r \ = \ \varphi_{|[\theta;\theta+2\pi]} \ = \ \overline{(\gamma_- \ - \ z_0)/r}\,. \tag{2.18}$$

Par le point 11 du théorème 2.1, $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ donc, par (2.18), on a $\gamma_+(\theta) = \gamma_+(\theta + 2\pi)$ et $\gamma_-(\theta) = \gamma_-(\theta + 2\pi)$. Donc γ_+ et γ_- sont fermés.
Par le point 11 du théorème 2.1, la restriction de φ à $[\theta; \theta + 2\pi[$ est injective donc, par (2.18) et le fait que la conjugaison $\bar{\cdot}$ est injective, les restrictions de γ_+ et γ_- à $[\theta; \theta + 2\pi[$ sont injectives. Donc γ_+ et γ_- sont simples. Ce sont donc des lacets.
D'après les points 10 et 11 du théorème 2.1, on a

$$\mathcal{U} = \varphi([\theta; \theta + 2\pi[) \subset \varphi([\theta; \theta + 2\pi]) \subset \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}$$

donc ces ensembles sont égaux. De plus, conjugaison $\bar{\cdot}$ est bijective de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc, par (2.18),

$$\begin{aligned} z \in \ \gamma_+\big([\theta; \theta + 2\pi]\big) \ &\Longleftrightarrow \exists t \in \ [\theta; \theta + 2\pi]\,; \ z \ = \ \gamma_+(t) \\ &\Longleftrightarrow \exists t \in \ [\theta; \theta + 2\pi]\,; z \ = \ z_0 \ + \ r\varphi(t) \\ &\Longleftrightarrow \exists u \in \ \mathcal{U}\,; z \ = \ z_0 \ + \ ru \\ &\Longleftrightarrow |z \ - \ z_0| \ = \ r \ \Longleftrightarrow \ \exists u \in \mathcal{U}\,; z \ = \ z_0 \ + \ r\overline{u} \\ &\Longleftrightarrow \exists t \in \ [\theta; \theta + 2\pi]\,; z \ = \ z_0 \ + \ r\overline{\varphi(t)} \\ &\Longleftrightarrow \exists t \in \ [\theta; \theta + 2\pi]\,; z \ = \ \gamma_-(t) \ \Longleftrightarrow \ z \in \ \gamma_-\big([\theta; \theta + 2\pi]\big)\,. \end{aligned}$$

Donc $\gamma_+([\theta; \theta + 2\pi]) = \gamma_-([\theta; \theta + 2\pi]) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| = r\} = C(z_0; r)$. □

La suite de cette partie est consacrée à démontrer le théorème précédent.

Démonstration du théorème 2.1. Pour $z = 0$, la suite des sommes partielles de s est constante égale à $0^0 = 1$ donc la somme de la série $\exp(0) = 1$. On a montré 1.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!}$$

et la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est continue (cf. exemple 1.3) donc, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les égalités précédentes, on obtient $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$. On a montré 2.
Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$. Puisque le rayon de convergence de s est infini, les séries $\sum z_1^n/(n!)$ et $\sum z_2^n/(n!)$ convergent absolument (cf. corollaire 2.1). Donc, par la proposition 2.5 et la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \exp(z_1)\,\exp(z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k\, z_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, z_1^k\, z_2^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n = \exp(z_1 + z_2)\,. \end{aligned}$$

On a montré 3.
Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après 1 et 3, on a $1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z)$. Nécessairement, $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = 1/\exp(z)$. On a montré 4.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a déjà montré que $\exp(x) \in \mathbb{R}$. Par 3 et 4, $\exp(x) = (\exp(x/2))^2 > 0$. Par 1, 2 et 3, on a

$$|\exp(ix)|^2 = \overline{\exp(ix)}\,\exp(ix) = \exp(-ix)\,\exp(ix) = \exp(0) = 1\,. \tag{2.19}$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc, par 3, $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z))\exp(i\mathrm{Im}(z))$ et, par (2.19), $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. On a montré 5.
Par la proposition 2.7, la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$-dérivée

$$\exp'(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)}{(p+1)!}\, z^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} = \exp(z)\,.$$

Toujours par la proposition 2.7 (ou bien proposition 1.25), cos, sin, ch et sh sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et, par la proposition 1.25,

$$\cos'(z) = \frac{i\mathrm{e}^{iz} + (-i)\mathrm{e}^{-iz}}{2} = -\sin(z)\,, \quad \sin'(z) = \frac{i\mathrm{e}^{iz} - (-i)\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \cos(z)\,,$$

$$\mathrm{ch}'(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} + (-1)\mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{sh}(z) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(z) = \frac{\mathrm{e}^{z} - (-1)\mathrm{e}^{-z}}{2} = \mathrm{ch}(z)\,.$$

Par le corollaire 2.2, les fonctions cos, sin, ch et sh sont C_h^∞. On a montré 6.
Pour $a \in \mathbb{C}$, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto at$ est C^1. Comme l'exponentielle complexe est C_h^1 par 6, l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(at)$ est de classe C^1 de dérivée $\mathbb{R} \ni t \mapsto a\exp(at)$, par la proposition 1.25. On a montré 7.
D'après 7 avec $a = 1$, $\exp_{|\mathbb{R}}$ est de classe C^1 et $(\exp_{|\mathbb{R}})' = \exp_{|\mathbb{R}}$. Par récurrence, on vérifie

qu'elle est de classe C^∞. Par 5, $(\exp_{|\mathbb{R}})'$ est strictement positive donc $\exp_{|\mathbb{R}}$ est strictement croissante. De plus, pour $x \geq 0$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \ \geq \ 1 \,+\, x$$

donc, par passage à la limite $N \to \infty$, on a $\exp(x) \geq 1 + x$. Par le théorème des gendarmes pour $x \to +\infty$, exp tend vers $+\infty$ en $+\infty$. D'après 4, on en déduit que exp tend vers 0 en $-\infty$. D'après un cours de L1, exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$. On a montré 8.
On retrouve ainsi bien la définition de la fonction exponentielle que vous avez vue en terminale (et dont vous avez jusque-là admis l'existence !).
D'après 7 pour les $a \in \{i; -i; 1; -1\}$ et la proposition 1.25, φ, $\cos_{|\mathbb{R}}$, $\sin_{|\mathbb{R}}$, $\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}}$ et $\mathrm{sh}_{|\mathbb{R}}$ sont C^1 et on a les formules de dérivées de 9. Par récurrence, on vérifie que ces fonctions sont de classe C^∞. On a montré 9.
Pour l'étude de la fonction φ (pour montrer 10), on va utiliser le

Lemme 2.1. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(a_n)_{n\geq 2n_0}$ une suite réelle décroissante, qui tend vers 0, et $(S_n)_{n\geq 2n_0}$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum_{n\geq 2n_0}(-1)^n a_n$. Alors la série converge et*

$$\forall\, p \in \big(\mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[\big)\,, \quad S_{2p+1} \ \leq \ \sum_{n=2n_0}^{\infty} (-1)^n a_n \ \leq \ S_{2p}\,.$$

Démonstration. Voir TD. □

Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le corollaire 2.1, la série complexe $s(z)$ converge absolument. Donc son terme général tend vers 0. En particulier, ses sous-suites

$$\left(\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\right)_n \quad \text{et} \quad \left(\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_n$$

tendent aussi vers 0. De plus, pour $|z| \leq 2$, ces sous-suites sont décroissantes à partir du rang 1 et 0 respectivement. Pour $|z| \leq 2$, on peut donc appliquer le lemme 2.1 à

$$\sum_{n\geq 2} \frac{|z|^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et à} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

En particulier, on a

$$\cos(2) \ = \ 1 \,-\, \frac{2^2}{2} \,+\, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!} \ \leq \ -1 \,+\, \sum_{n=2}^{2} \frac{(-1)^n\, 2^{2n}}{(2n)!} \ = \ -\frac{1}{3} \ < \ 0\,. \tag{2.20}$$

et, pour $t \in]0; 2]$,

$$\sin(t) \ \geq \ \sum_{n=0}^{1} (-1)^n \, \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \ = \ t \,-\, \frac{t^3}{6} \ = \ \frac{t}{6}\,(6 \,-\, t^2) > 0\,. \tag{2.21}$$

D'après (2.19), φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$. En particulier, par le 2 de la remarque 2.7, on a

$$\forall\, t \in \mathbb{R}\,, \quad \cos^2(t) \,+\, \sin^2(t) \ = \ 1\,. \tag{2.22}$$

Comme $(\cos_{|\mathbb{R}})' = -\sin_{|\mathbb{R}}$ (cf. 9) et $\sin_{|\mathbb{R}} > 0$ sur $[0;2]$ par (2.21), $\cos_{|\mathbb{R}}$ est strictement décroissante sur $[0;2]$. Comme $\cos_{|\mathbb{R}}$ est continue, $\cos(0) = 1$ (par la définition et 1) et $\cos(2) < 0$ (cf. (2.20)), il existe un unique $t \in [0;2]$ tel que $\cos(t) = 0$. On le note t_0 et on pose $\pi = 2t_0$.
Comme $\cos_{|\mathbb{R}}$ est strictement positive sur $[0;t_0[$ et $(\sin_{|\mathbb{R}})' = \cos_{|\mathbb{R}}$ (cf. 9), $\sin_{|\mathbb{R}}$ est strictement croissante sur $[0;t_0]$ et, comme $\sin(0) = 0$ (par la définition), $\sin_{|\mathbb{R}}$ est strictement positive sur $]0;t_0]$. D'après (2.22), $\sin^2(t_0) = 1$ donc $\sin(t_0) = 1$. D'où $\varphi(t_0) = \cos(t_0) + i\sin(t_0) = i$.
Soit $t \in [0;t_0[$. Comme $\sin(t) < \sin(t_0) = 1 = \mathrm{Im}(i)$, on a nécessairement $\varphi(t) \neq i$. Donc t_0 est le minimum de l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}^+ ;\ \varphi(t) = i\}$.
Par 1, 2 et 3, on a $\varphi(2t_0) = \varphi(t_0)^2 = i^2 = -1$, $\varphi(4t_0) = \varphi(2t_0)^2 = 1 = \varphi(0)$, $\varphi(3t_0) = \varphi(t_0)\varphi(2t_0) = -i$ et $\varphi(-2t_0) = \overline{\varphi(2t_0)} = \overline{-1} = -1$. On a montré 12.
On note que l'argument précédent montre que, sur $[0;t_0]$, $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sont positives et sin, qui est continue, est bijective de $[0;t_0]$ sur $[0;1]$.
Pour $t \in [t_0;2t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t-t_0)\varphi(t_0) = i\varphi(t-t_0) = i(u+iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - t_0 \in [0;t_0]$. Donc $\cos(t) = -v \leq 0$ et $\sin(t) = u \geq 0$.
Pour $t \in [2t_0;3t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t-2t_0)\varphi(2t_0) = -(u+iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - 2t_0 \in [0;t_0]$. Donc $\cos(t) = -u \leq 0$ et $\sin(t) = -v \leq 0$.
Pour $t \in [3t_0;4t_0]$, on a, par 3, $\varphi(t) = \varphi(t-3t_0)\varphi(3t_0) = -i(u+iv)$ avec $u \geq 0$ et $v \geq 0$ car $t - 3t_0 \in [0;t_0]$. Donc $\cos(t) = v \geq 0$ et $\sin(t) = -u \leq 0$.
Pour montrer 10, il reste à prouver la surjectivité de φ.
Soit $(u;v) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. Nécessairement, $v \in [0;1] = [\sin(0);\sin(t_0)]$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $\sin_{|\mathbb{R}}$, il existe $t \in [0;t_0]$ tel que $\sin(t) = v$. Comme $(u+iv) \in \mathcal{U}$ et $u \geq 0$,

$$u = \sqrt{1-v^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)\,,$$

car $\cos_{|\mathbb{R}}$ est positive sur $[0;t_0]$. Donc $u + iv = \cos(t) + i\sin(t) = \varphi(t)$. (*)
Soit $u \in \mathbb{R}^-$ et $v \in \mathbb{R}^+$ tel que $u+iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $(u+iv)/i$, il existe $t \in [0;t_0]$ tel que $u + iv = i\varphi(t) = \varphi(t_0)\varphi(t) = \varphi(t_0+t)$, par 3.
Soit $(u;v) \in (\mathbb{R}^-)^2$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $-(u+iv)$, il existe $t \in [0;t_0]$ tel que $u + iv = -\varphi(t) = \varphi(2t_0)\varphi(t) = \varphi(2t_0+t)$, par 3.
Soit $u \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^-$ tel que $u + iv \in \mathcal{U}$. En appliquant le résultat (*) à $\overline{u+iv}$, il existe $t \in [0;t_0]$ tel que $u + iv = \overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$, par 2.
On a montré que φ est surjective, ce qui termine la preuve de 10.
En partant de $\varphi(0) = 1 = \varphi(4t_0)$ (cf. 12) et en utilisant 3, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(4kt_0) = 1$. On en déduit par 2 que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(-4kt_0) = 1$, donc on a, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(4kt_0) = 1$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a donc, par 3, $\varphi(t+4t_0) = \varphi(t)\varphi(4t_0) = \varphi(t)$. Donc φ est périodique de période $4t_0 = 2\pi$. Cela montre, en particulier, l'implication "$\Longleftarrow$" dans 11 et aussi 13 puisque $\cos_{|\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\varphi$ et $\sin_{|\mathbb{R}} = \mathrm{Im}\varphi$.
Soit $(t;t') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \varphi(t')$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ (resp. $p' \in \mathbb{Z}$) la partie entière de $t/(4t_0)$ (resp. $t'/(4t_0)$) et on pose $\theta := t - 4pt_0$ (resp. $\theta' := t' - 4p't_0$). On a $0 \leq \theta < 4t_0$ et $0 \leq \theta' < 4t_0$ et, par périodicité, $\varphi(\theta) = \varphi(t) = \varphi(t') = \varphi(\theta')$. Soit $u = \mathrm{Re}(\varphi(\theta))$ et $v = \mathrm{Im}(\varphi(\theta))$.
Cas où $(u;v) \in (\mathbb{R}^+)^2$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0;4t_0]$ obtenue plus haut, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [0;t_0]$.
Cas où $u \in \mathbb{R}^-$ et $v \in \mathbb{R}^+$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0;4t_0]$,

on a nécessairement $\theta, \theta' \in [t_0; 2t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - t_0) = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(t_0)} = \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(t_0)} = \varphi(\theta' - t_0)$$

donc $\sin(\theta - t_0) = \sin(\theta' - t_0)$ avec $\theta - t_0, \theta' - t_0 \in [0; t_0]$.
Cas où $(u; v) \in (\mathbb{R}^-)^2$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [2t_0; 3t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - 2t_0) = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(2t_0)} = \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(2t_0)} = \varphi(\theta' - 2t_0)$$

donc $\sin(\theta - 2t_0) = \sin(\theta' - 2t_0)$ avec $\theta - 2t_0, \theta' - 2t_0 \in [0; t_0]$.
Cas où $u \in \mathbb{R}^+$ et $v \in \mathbb{R}^-$. D'après la détermination des signes de $\cos_{|\mathbb{R}}$ et $\sin_{|\mathbb{R}}$ sur $[0; 4t_0]$, on a nécessairement $\theta, \theta' \in [3t_0; 4t_0]$. Par 3 et 4, on a

$$\varphi(\theta - 3t_0) = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi(3t_0)} = \frac{\varphi(\theta')}{\varphi(3t_0)} = \varphi(\theta' - 3t_0)$$

donc $\sin(\theta - 3t_0) = \sin(\theta' - 3t_0)$ avec $\theta - 3t_0, \theta' - 3t_0 \in [0; t_0]$.
Comme $\sin_{|\mathbb{R}}$ est injective de $[0; t_0]$, on obtient, dans tous les cas, $\theta = \theta'$. Cela montre que $t - 4pt_0 = t' - 4p't_0$ soit $t - t' = 4(p - p')t_0$. On a montré l'implication "$\Longrightarrow$" dans 11.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathcal{U}$, il existe, par 10, un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = z$. Soit $p \in \mathbb{Z}$ la partie entière de $(t - \theta)/(4t_0)$. On a $\theta \leq t - 4pt_0 < \theta + 4t_0$. Par 3,

$$\varphi(t - 4t_0) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(4t_0)} = \varphi(t) = z\,.$$

On a montré que la restriction de φ à $[\theta; \theta + 4t_0[= [\theta; \theta + 2\pi[$ est surjective.
Soit $t, t' \in [\theta; \theta + 2\pi[$ tel que $\varphi(t) = \varphi(t')$. D'après l'équivalence de 11, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t = t' + 2k\pi$. Comme $\theta \leq t < \theta + 2\pi$ et $-\theta - 2\pi < -t' \leq -\theta$, on a

$$-2\pi = \theta + (-\theta - 2\pi) < t - t' = 2k\pi < \theta + 2\pi + (-\theta) = 2\pi$$

donc $k = 0$ et $t = t'$. On a montré l'injectivité de la restriction de φ à $[\theta; \theta + 2\pi[$, ce qui termine la preuve de 11.
Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. En utilisant 3, 5, 10, 8 et 11, on obtient $\exp(z) = \exp(z')$

$$\begin{aligned}
\exp(z) = \exp(z') &\Longleftrightarrow \exp\big(\mathrm{Re}(z)\big)\,\varphi\big(\mathrm{Im}(z)\big) = \exp\big(\mathrm{Re}(z')\big)\,\varphi\big(\mathrm{Im}(z')\big)\\
&\Longleftrightarrow \exp_{|\mathbb{R}}\big(\mathrm{Re}(z)\big) = \exp_{|\mathbb{R}}\big(\mathrm{Re}(z)\big) \quad \text{et} \quad \varphi\big(\mathrm{Im}(z)\big) = \varphi\big(\mathrm{Im}(z')\big)\\
&\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z') \in 2\pi\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}\,.
\end{aligned}$$

On a montré 14.
La périodicité de φ de période 2π (cf. 13) donne via la formule $\exp(z) = \exp(\mathrm{Re}(z))\varphi(\mathrm{Im}(z))$ celle de exp de période $2i\pi$. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Comme $|w| \in]0; +\infty[$, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(r) = |w|$ (cf. 8). D'après 10 et le fait que $w/|w| \in \mathcal{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\theta) = w/|w|$. Par 3, on obtient $\exp(r + i\theta) = \exp(r)\exp(i\theta) = |w| \times w/|w| = w$. On a montré la surjectivité de exp et terminé la preuve de 15 et du théorème. $\square$

Remarque 2.8. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Comme dans la preuve du 8 du théorème 2.1, on peut montrer, pour $x > 0$, que*

$$\exp(x) \;\geq\; \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad \textit{et donc} \quad \frac{\exp(x)}{x^n} \;\geq\; \frac{x}{(n+1)!}\,.$$

Comme le terme de droite de la dernière inégalité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} \;=\; +\infty\,,$$

par le théorème des gendarmes.
En utilisant le 4 du théorème 2.1, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} x^m \exp(-x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^m \exp(x) \;=\; 0\,.$$

Cette famille de résultats s'appellent les résultats de croissances comparées.
En utilisant le point 3 du théorème 2.1, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $(\exp(z))^k = \exp(kz)$. En utilisant le point 4 du théorème 2.1, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $(\exp(z))^k = \exp(kz)$.

2.3 Logarithmes complexes.

Dans le point 8 du théorème 2.1, on a vu que l'exponentielle réelle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$. La bijection réciproque est le logarithme népérien ln. Comme l'exponentielle complexe n'est pas injective mais est surjective (cf. les points 11 et 15 de ce théorème), on est obligé de réduire le domaine de définition de l'exponentielle complexe pour obtenir une bijection. La situation est similaire à celle rencontrée lorsqu'on cherche à “rendre bijective” la fonction $\cos_{|\mathbb{R}}$ pour construire la fonction arcosinus (cf. L1). Lorsqu'on a trouvé une partie U de $\mathbb{C}$ telle que la restriction de l'exponentielle complexe à U soit bijective, il est naturel d'appeler la bijection réciproque, qui est forcément définie sur une partie de $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$, un logarithme complexe. Cela nous amène à la

Définition 2.6. *Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{C}^*$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est une* détermination du logarithme *sur Ω si f est continue et vérifie, pour tout $z \in \Omega$, $\exp(f(z)) = z$.*

Supposons que, sur un ouvert Ω inclus dans $\mathbb{C}^*$, on ait une “fonction argument” c'est-à-dire une fonction $\arg : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $z \in \Omega$, $\arg(z)$ soit un argument de z (au sens de la définition 2.5). Alors on peut écrire, pour $z \in \Omega$,

$$\exp\Big(\ln(|z|) \;+\; i\arg(z)\Big) \;=\; \exp\Big(\ln(|z|)\Big)\,\exp\big(i\arg(z)\big) \;=\; |z|\,\exp\big(i\arg(z)\big) \;=\; z\,.$$

On voit que la recherche de déterminations du logarithme est liée à celle de “fonctions argument”.
Notons tout de suite que si l'on a une détermination du logarithme $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f + 2ik\pi$ en est une autre, d'après la propriété 15 du théorème 2.1. Lorsque Ω est un domaine inclus dans $\mathbb{C}^*$, on trouve ainsi toutes les déterminations du logarithme sur Ω comme le montre la

Proposition 2.10. *Si Ω est un domaine de $\mathbb{C}$ et si f et g sont deux déterminations du logarithme sur Ω alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) = g(z) + 2ik\pi$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. Pour tout $z \in \Omega$, on a $\exp(f(z)) = z = \exp(g(z))$ donc, par le théorème 2.1, $\exp(f(z) - g(z)) = 1$. Pour tout $z \in \Omega$, il existe, par ce même théorème, un $k(z) \in \mathbb{Z}$ tel que $f(z) - g(z) = 2ik(z)\pi$. Cela définit une fonction $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui est continue puisque f et g le sont et $k = (f - g)/(2i\pi)$. Il suffit de montrer que cette fonction est constante.
Supposons qu'il existe $(z_1; z_2) \in \Omega$ tel que $k(z_1) < k(z_2)$. Comme Ω est connexe par arcs, il existe une courbe continue $\gamma : [a; b] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$. Par composition, $k \circ \gamma$ est continue. Comme $(k \circ \gamma)(a) = k(z_1) < k(z_2) = (k \circ \gamma)(b)$, il existe $\ell \in (]k(z_1); k(z_2)[\setminus\mathbb{Z})$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $k \circ \gamma$, il existe $t \in [a; b]$ tel que $(k \circ \gamma)(t) = \ell$. Contradiction car $k \circ \gamma$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
La fonction k est donc constante. □

A-t-on une détermination du logarithme sur le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{C}^*$, à savoir $\mathbb{C}^*$ lui-même ? La réponse est non !

Proposition 2.11. *Si Ω est un ouvert contenant $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| = 1\}$ alors il n'existe pas de détermination du logarithme sur Ω. En particulier, il n'existe pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. Supposons qu'on ait une détermination du logarithme f sur Ω. Soit $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = \exp(it)$. D'après le corollaire 2.4, γ est une fonction continue à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc dans Ω. Donc $f \circ \gamma$ est aussi continue et on a, d'après le théorème 2.1,

$$(f \circ \gamma)(0) \;=\; f\big(\exp(0)\big) \;=\; f\big(\exp(2i\pi)\big) \;=\; (f \circ \gamma)(2\pi)\,. \tag{2.23}$$

Comme f est une détermination du logarithme sur Ω, on a, pour tout $t \in [0; 2\pi]$,

$$\exp\big((f \circ \gamma)(t)\big) \;=\; \exp\big(f(\gamma(t))\big) \;=\; \gamma(t) \;=\; \exp(it)\,.$$

Par le théorème 2.1, il existe une fonction $k : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $t \in [0; 2\pi]$, $(f \circ \gamma)(t) - t = 2ik(t)\pi$. Comme dans la preuve de la proposition 2.10, on montre que k est continue et, comme elle est à valeurs entières, elle est constante égale à un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$. On a donc $(f \circ \gamma)(0) = 2ik_0\pi$ et $(f \circ \gamma)(2\pi) = 2\pi + 2ik_0\pi$, ce qui contredit (2.23). □

Remarque 2.9. *On peut généraliser la proposition précédente à une situation large. On voit que le coeur de la preuve par l'absurde précédente est le fait de pouvoir "faire un tour autour de 0 dans Ω". Si Ω est un ouvert contenant un chemin fermé "entourant" l'origine, on pourra de la même façon montrer l'inexistence d'une détermination du logarithme sur Ω. Pour espérer en construire une, il faut "couper" $\mathbb{C}$ pour obtenir Ω de façon à ne pas pouvoir faire un tel tour dans Ω.*

Définition-Proposition 2.7. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \Omega_\theta \;&:=\; \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+ \;=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \forall\, r \geq 0\,,\ z \neq r\exp(i\theta)\big\} \;\subset\; \mathbb{C}^* \\ \textit{et}\quad B_\theta \;&:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}(z) \in]\theta; \theta + 2\pi[\big\}\,. \end{aligned}$$

Par la définition 2.5, la fonction $\mathrm{Arg}_\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow]\theta; \theta + 2\pi]$ *est l'application qui, à* $z \in \mathbb{C}^*$*, associe l'unique argument de* z *qui appartient à* $]\theta; \theta + 2\pi]$*.*
Alors la fonction exponentielle complexe est bijective de B_θ *sur* Ω_θ*. Sa bijection réciproque* Log_θ *est une détermination du logarithme sur* Ω_θ*. Elle est donnée par*

$$\forall\, z \in \Omega_\theta\,, \quad \mathrm{Log}_\theta(z) \;=\; \ln(|z|) \,+\, i\, \mathrm{Arg}_\theta(z)\,. \tag{2.24}$$

Lorsque $\theta = -\pi$*, la fonction* $\mathrm{Arg}_{-\pi}$ *associe à* $z \in \mathbb{C}^*$ *son argument principal* $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi; \pi]$ *(cf. définition 2.5). La fonction* $\mathrm{Log}_{-\pi}$*, qui est définie sur* $\Omega_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$*, est appelée la détermination principale du logarithme et on la note* Log*. Sa restriction à* $]0; +\infty[$ *coincide avec le logarithme népérien* $\ln$*.*

Démonstration. Soit $z \in \Omega_\theta$. Donc $\mathrm{Arg}_\theta(z)$ est bien défini et appartient à l'intervalle ouvert $]\theta; \theta + 2\pi[$.
En effet, si l'on avait $\mathrm{Arg}_\theta(z) = \theta + 2\pi$, on aurait $z = |z| \exp(i(\theta + 2\pi)) = |z| \exp(i\theta)$ (cf. le point 15 du théorème 2.1) et z appartiendrait à la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}^+$. Contradiction.
On résoud l'équation $\exp(w) = z$, d'inconnue $w = x + iy \in B_\theta$ (avec x, y réels). En utilisant le corollaire 2.3, la bijectivité de $\exp_{|\mathbb{R}}$ (cf. le point 8 du théorème 2.1) et le fait que $y \in]\theta; \theta + 2\pi[$, on a

$$\begin{aligned} \exp(w) \;=\; z \iff \big(e^x \;=\; |z| \;\text{ et }\; y \in \mathcal{A}_z\big) &\iff \big(x \;= \ln\big(|z|\big) \;\text{ et }\; y \;=\; \mathrm{Arg}_\theta(z)\big) \\ \iff w \;=\; \ln\big(|z|\big) \,+\, i\, \mathrm{Arg}_\theta(z)\,. & \end{aligned}$$

Cela montre la bijectivité de la restriction de l'exponentielle complexe à B_θ et à valeurs dans Ω_θ, que sa bijection réciproque est donnée par (2.24) et que, pour tout $z \in \Omega_\theta$, on a $\exp(\mathrm{Log}_\theta(z)) = z$.
Dans le cas $\theta = -\pi$, on a, pour $z \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathrm{Arg}(z) = 0$ et $\ln(|z|) = \ln(z)$ donc $\mathrm{Log}(z) = \ln(z)$. Donc $\mathrm{Log}_{|\mathbb{R}^{+*}} = \ln$.
Il reste à montrer que les fonctions Log_θ sont continues.
Comme $\ln$ est la bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle ouvert, elle est continue (cf. L1). Comme le module est continu, $\ln \circ |\cdot|$ est continue. Il reste donc à montrer la continuité des fonctions Arg_θ.
Pour $z \in \Omega_\theta$, on vérifie (cf. TD) que $ze^{-i(\pi+\theta)} \in \Omega_{-\pi}$ et que

$$\mathrm{Arg}_\theta(z) \;=\; \mathrm{Arg}\big(ze^{-i(\pi+\theta)}\big) \,+\, \pi \,+\, \theta\,.$$

Il suffit donc de montrer que Arg est continue sur $\Omega_{-\pi}$. Il se trouve (cf. TD) que

$$\forall\, z \in\; \Omega_{-\pi} \;= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\,, \quad \mathrm{Arg}(z) \;=\; 2\, \mathrm{Arctan}\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) \,+\, |z|}\right)\,. \tag{2.25}$$

Comme Re, Im, $|\cdot|$ sont continues sur $\mathbb{C}$ (cf. exemple 1.3), comme Arctan est continue (cf. L1), on déduit de (2.25) que la fonction Arg est bien continue par composition, somme et quotient. $\square$

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, le logarithme népérien ln est une primitive de la fonction $0 < t \mapsto 1/t$. A-t-on une propriété similaire pour les Log_θ ? Oui et même pour toute détermination du logarithme comme le montre la

Proposition 2.12. *Soit* Ω *un ouvert non vide inclus dans* $\mathbb{C}^*$*.*

1. *Si f est une détermination du logarithme sur Ω alors f est holomorphe sur Ω et vérifie, pour tout $z \in \Omega$, $f'(z) = 1/z$.*

2. *Si f est une primitive de $z \mapsto 1/z$ sur Ω et si Ω est un domaine, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f - \alpha$ est une détermination du logarithme sur Ω.*

Remarque 2.10. *On a vu dans la proposition 2.11 que la fonction $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$. En revanche, pour $\theta \in \mathbb{R}$, sa restriction à $\Omega_\theta = \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ en a et* Log_θ *en est une, d'après la proposition 2.12.*

Démonstration de la proposition 2.12. Soit Ω un ouvert non vide inclus dans $\mathbb{C}^*$.

1. Prenons une détermination du logarithme f sur Ω et $z_0 \in \Omega$. Pour $z \in (\Omega \setminus \{z_0\})$, on a $\exp(f(z)) = z \neq z_0 = \exp(f(z_0))$. Donc
$$\frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} \;=\; \frac{\exp(f(z)) - \exp(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \;\xrightarrow{z \to z_0}\; \exp'\big(f(z_0)\big) \;=\; \exp\big(f(z_0)\big) \;=\; z_0 \neq 0\,,$$
par composition de limite, puisque exp est $\mathbb{C}$-dérivable et f continue. Par inversion, f est holomorphe en z_0 de nombre $\mathbb{C}$-dérivé $1/z_0$. Donc f est bien une primitive de $\Omega \ni z \mapsto 1/z$.

2. On suppose maintenant que Ω est un domaine et que f est une primitive de $\Omega \ni z \mapsto 1/z$. Comme $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, la fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) = \exp(f(z))/z$ est bien définie et holomorphe, par composition et quotient (cf. proposition 1.25). De plus, pour $z \in \Omega$,
$$g'(z) \;=\; \frac{z\, f'(z)\, \exp(f(z)) \;-\; \exp(f(z))}{z^2} \;=\; 0\,,$$
puisque $zf'(z) = 1$. Comme Ω est un domaine, g est constante égale à un $c \in \mathbb{C}$, par la proposition 1.27. Comme l'exponentielle et $\Omega \ni z \mapsto 1/z$ ne s'annule pas, $c \neq 0$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(\alpha) = c$ (cf. le point 15 du théorème 2.1). On a donc, pour $z \in \Omega$, par les points 3 et 4 du théorème 2.1,
$$\exp\big(f(z) \;-\; \alpha\big) \;=\; \frac{\exp\big(f(z)\big)}{\exp(\alpha)} \;=\; \frac{z\, g(z)}{c} \;=\; z$$
et, comme la fonction $f - \alpha$ est continue, elle est bien une détermination du logarithme sur Ω. □

On termine cette partie sur les logarithmes en donnant un lien avec les séries entières.

Proposition 2.13. *Le rayon de convergence de la série entière*
$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(z-1)^n$$
est 1 et sa somme est la restriction de la détermination principale Log *du logarithme au disque $D(1;1[$ de convergence, c'est-à-dire, pour tout $z \in D(1;1[$, on a*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,(z-1)^n \;=\; \mathrm{Log}(z)\,. \tag{2.26}$$

Démonstration. En appliquant la règle de D'Alembert pour les séries entières, on trouve que celui de la série considérée est 1. Par la proposition 2.7, sa somme f est holomorphe sur $D(1;1[$ et on a, pour tout $z \in D(1;1[$, en utilisant une série géométrique,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times n(z-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)^{n-1} \stackrel{|z-1|<1}{=} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}\,.$$

La fonction f est donc une primitive de $D(1;1[\ni z \mapsto 1/z$. Par la proposition 2.12, c'est une détermination du logarithme sur $D(1;1[\subset \Omega_{-\pi}$. Par la définition-proposition 2.7, Log est aussi une détermination du logarithme sur $D(1;1[$. Par la proposition 2.10, $f - \mathrm{Log}$ est, sur $D(1;1[$, une constante égale à $f(1) - \mathrm{Log}(1) = 0 - 0 = 0$. Donc $f = \mathrm{Log}$ sur $D(1;1[$. $\square$

Remarque 2.11. *Attention, la fonction* Log *est définie sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ *mais la formule* (2.26) *n'est valable que sur* $D(1;1[$. *On a une situation similaire pour la fonction holomorphe* $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *donnée par* $g(z) = 1/(1-z)$, *qui est la somme sur* $D(0;1[$ *de la série entière*

$$\sum_{n \geq 0} z^n$$

mais pas sur un ensemble plus grand puisque cette série diverge pour $|z| \geq 1$.

CHAPTER 3

FONCTIONS ANALYTIQUES.

Dans ce chapitre, on introduit la notion de fonction analytique et on dégage un certain nombre de propriétés des fonctions analytiques. On montre, en particulier, qu'un fonction analytique est holomorphe et même de classe C_h^∞ et qu'une fonction holomophe de classe C_h^1 est analytique. On verra au chapitre 4 qu'une fonction holomophe est aussi analytique. Ces propriétés des fonctions analytiques sont vraiment étonnantes lorsqu'on les compare à celles des fonctions réelles d'une variable réelle de classe C^∞.

3.1 Séries entières et fonctions analytiques.

Définition 3.1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière en z_0, noté* DSE *en z_0, s'il existe une série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0; R[$ tels que, pour tout $z \in D(z_0; r[$,*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \,.$$

La proposition suivante suit directement de ce qu'on a vu sur les séries entières (Section 2.1).

Proposition 3.1. *Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est* DSE *en z_0 alors il existe $r > 0$ tel que f est C_h^∞ sur $D(z_0; r[$ et pour tout $z \in D(z_0; r[$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z-z_0)^n \,. \tag{3.1}$$

En particulier, s'il existe, le DSE en z_0 est unique.

Exemple 3.1. *Une fonction polynomiale P est DSE en tout $z_0 \in \mathbb{C}$ et si $n = \deg(P)$ alors*

$$P(z) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}\,(z-z_0)^k \,.$$

Exemple 3.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = 1/(1-z)$ est* DSE *en $z_0 = 0$. En effet, pour tout $z \in D(0;1[$, on a (cf. séries géométriques)*

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} z^n \, .$$

Exemple 3.3. *On a vu à la fin du chapitre précédent (cf. proposition 2.13), que la fonction* Log *(logarithme principal) est DSE en $z_0 = 1$.*

Exemple 3.4. *Prenons la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = 1/z$. Est-elle DSE? Si oui, en quel z_0? Étant donné $z_0 \neq 0$, on va donc naturellement chercher à faire apparaitre $z - z_0$.*

$$f(z) \ = \ \frac{1}{z - z_0 + z_0} \ = \ \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0}} \, .$$

Si $|z - z_0|/|z_0| < 1$, i.e. si $z \in D(z_0; |z_0|[$, on a alors

$$f(z) \ = \ \frac{1}{z_0} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(- \frac{z - z_0}{z_0} \right)^n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n .$$

La fonction f est donc DSE en n'importe quel $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

Définition 3.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est* analytique *sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction f est* DSE *en z_0. En particulier, f est holomorphe sur Ω (cf. proposition 2.7) et même de classe C_h^∞ (cf. corollaire 2.2).*

Exemple 3.5. *L'exemple 3.4 montre que la fonction $f(z) = 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.*

Le proposition qui suit découle directement de ce qu'on a fait sur les séries entières (cf. propositions 2.4 et 2.6 et corollaire 2.2).

Proposition 3.2. *Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytiques et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + \lambda g$ et fg sont analytiques sur Ω. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est analytique.*

Les fonctions polynômiales sont évidemment analytiques sur $\mathbb{C}$ tout entier. On montrera dans la Section 3.3 qu'en fait toutes les fonctions de classe C_h^1 sont analytiques sur leur ensemble de définition. Mieux, on prouvera que c'est le cas pour toutes les fonctions holomorphes (voir le chapitre 4).
Pour les fonctions réelles d'une variable réelle, la situation est différente. On peut montrer, par exemple, que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$, si $x \neq 0$, et par $f(0) = 0$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cependant f n'est pas nulle. Donc la formule (3.1), avec $z_0 = 0$ et la variable z remplacée par une variable réelle, est fausse pour cette fonction.

Exercice 3.1. *Montrer que la fonction exponentielle est analytique. Indication: comme dans l'exemple 3.4, si $z_0 \in \mathbb{C}$ écrire $z = z_0 + (z - z_0)$.*

3.2 Zéros isolés et prolongement analytique

Le fait qu'une fonction soit analytique a des conséquences importantes (en plus du côté infiniment $\mathbb{C}$-dérivable). Pouvoir développer en série entière permet d'avoir des informations dans tout un disque (le disque de convergence de la série entière) à partir seulement d'informations au voisinage d'un point z_0.

Proposition 3.3. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique.*

1. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est nulle.*
2. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est constante.*
3. *S'il existe $z_0 \in \Omega$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in (\mathbb{N} \cap]N; +\infty[)$, $f^{(n)}(z_0) = 0$ alors f est une fonction polynôme de degré au plus N.*

Remarque 3.1. *Commentaires.*

1. *Si f est la somme, sur $\Omega = D(z_0; R[$, d'une série entière centrée en z_0, les résultats de la proposition 3.3 sont immédiats. L'intérêt de cette proposition réside dans le fait que les hypothèses, qui sont "locales" (ne dépendent que de ce qui se passe sur un disque centré en z_0), impliquent une propriété globale (valable sur tout Ω).*
2. *L'hypothèse "Ω est connexe par arcs" est essentielle. Par exemple, si l'on considère l'ouvert $\Omega = D(0; 1[\cup D(3i; 1[$ et si l'on prend la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = 0$, pour $z \in D(0; 1[$, et par $f(z) = 1$, pour $z \in D(3i; 1[$, alors f est bien analytique mais le résultat 1 de la proposition est faux pour $z_0 = 0$.*

Démonstration. Montrons d'abord que le résultat 1 implique les deux autres. On remarque que le résultat 2 est un cas particulier du résultat 3. On vérifie donc : $1 \Longrightarrow 3$.
Supposons que, pour un $z_0 \in \Omega$, pour un $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N$, $f^{(n)}(z_0) = 0$.
Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) \;=\; f(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n .$$

Comme différence de fonctions analytiques, g est analytique. De plus, pour $z \in \Omega$ et $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} g^{(p)}(z) &= f^{(p)}(z) - \sum_{n=p}^{N} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,\frac{n!}{(n-p)!}\,(z - z_0)^{n-p} \quad \text{si} \quad p \le N , \\ &= f^{(p)}(z) \quad \text{si} \quad p > N . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g^{(p)}(z_0) = 0$. On a aussi $g(z_0) = 0$. On peut donc appliquer le 1 à g, ce qui montre que g est nulle. Par la définition de g, f est bien une fonction polynôme de degré au plus N.
On montre maintenant 1.
Soit $\mathcal{N} := \{z \in \Omega \,;\, \forall n \in \mathbb{N} \,,\, f^{(n)}(z) = 0\}$. Par hypothèse, $z_0 \in \mathcal{N}$. On vérifie d'abord les deux propriétés suivantes : a). $\mathcal{N}$ est un ouvert; b). Si $(z_k)_k$ est une suite d'éléments de $\mathcal{N}$ convergeant vers un $z \in \Omega$ alors $z \in \mathcal{N}$. On dit que $\mathcal{N}$ est un fermé de Ω.

a). Comme $\mathcal{N}$ est non vide, on prend un $z_1 \in \mathcal{N}$. Comme f est analytique, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall\, z \in D(z_1; r[\,, \quad f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_1)}{n!}\,(z - z_1)^n\,.$$

Comme $z_1 \in \mathcal{N}$, f est nulle sur $D(z_1; r[$. En particulier, toutes ses $\mathbb{C}$-dérivées sont nulles sur $D(z_1; r[$ donc $D(z_1; r[\subset \mathcal{N}$. On a montré que $\mathcal{N}$ est ouvert.

b). Soit $(z_k)_k \in \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ une suite déléments de $\mathcal{N}$ qui converge vers un certain $z \in \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est continue sur Ω donc $f^{(n)}(z)$ est la limite de la suite $(f^{(n)}(z_k))_k$ et comme, pour tout k, $z_k \in \mathcal{N}$, $f^{(n)}(z_k) = 0$, $f^{(n)}(z)$ est la limite de la suite nulle donc $f^{(n)}(z) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathcal{N}$. On a montré que $\mathcal{N}$ est fermé dans Ω.

On va montrer que $\mathcal{N} = \Omega$, ce qui prouvera que $f(z) = 0$, pour tout $z \in \Omega$. Par définition, $\mathcal{N} \subset \Omega$. Il reste donc à montrer que $\Omega \subset \mathcal{N}$.
Soit $z_1 \in \Omega$. Par hypothèse, il existe $z_0 \in \mathcal{N}$. Comme Ω est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. Soit $J := \{t \in [0; 1]; \gamma(t) \in \mathcal{N}\}$. Comme $\gamma(0) = z_0 \in \mathcal{N}$, $0 \in J$ et J est non vide. Soit $T = \sup J$. Comme $J \subset [0; 1]$, $T \in [0; 1]$. De plus, il existe $(t_k)_k \in J^{\mathbb{N}}$ telle que $t_k \to T$. Pour tout k, $t_k \in J$ donc $\gamma(t_k) \in \mathcal{N}$. Comme γ est continue sur $[0; 1]$, la suite $(\gamma(t_k))_k$ tend vers $\gamma(T)$. D'après la propriété b) (avec $z_k = \gamma(t_k)$, pour tout k), $z := \gamma(T) \in \mathcal{N}$ et $T \in J$.
Supposons $T < 1$. Comme $\mathcal{N}$ est un ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(z; \epsilon[\subset \mathcal{N}$. Comme γ est continue en T, il existe $\delta > 0$ tel que $\gamma(]T - \delta; T + \delta[) \subset D(z; \epsilon[$. Comme $T < 1$, il existe $s \in (]T; T + \delta[\cap [0; 1])$ et on a $\gamma(s) \in D(z; \epsilon[\subset \mathcal{N}$. Donc $s \in J$. Contradiction car $s > T$ et $T = \sup J$.
Donc $T = 1$ et $z_1 = \gamma(1) = \gamma(T) \in \mathcal{N}$. On a montré que $\Omega \subset \mathcal{N}$. □

Remarque 3.2. *Ce qu'on a montré ci-dessus est qu'en fait, si Ω est connexe par arcs, alors un sous-ensemble non-vide de Ω (ici Z), qui est à la fois ouvert et fermé dans Ω, est égal à Ω. Un ensemble qui vérifie cette propriété est dit connexe. On a donc montré que, si Ω est connexe par arcs, alors Ω est connexe. Dans la plupart des livres, on trouve en fait comme définition d'un domaine que c'est un ouvert connexe. On peut en fait montrer que, pour les <u>ouverts</u> de $\mathbb{C}$, les deux notions de connexe et de connexe par arcs coïncident. La notion d'ensemble connexe par arcs est plus intuitive que celle de connexe, c'est pour ça qu'on l'a choisie dans la définition d'un domaine.*

Théorème 3.1 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique non-nulle. Alors l'ensemble $Z(f) := \{z \in \Omega \,|\, f(z) = 0\}$ des zéros de f est un ensemble discret, i.e. tout zéro de f est isolé: pour tout $z_0 \in Z(f)$, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\setminus\{z_0\} \cap Z(f) = \emptyset$, autrement dit, pour tout $z \in D(z_0; r[\setminus\{z_0\}$, on a $f(z) \neq 0$.*

Démonstration. Soit f analytique non nulle et $z_0 \in Z(f)$. D'après la proposition 3.3, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ (sinon f serait nulle). Soit $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N};\ f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. En particulier, si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n < n_0$ alors $f^{(n)}(z_0) = 0$. Comme f est DSE en z_0, il existe $R > 0$ tel que, pour tout $z \in D(z_0; R[$, on a (3.1) c'est-à-dire

$$f(z) \;=\; \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \;=\; (z - z_0)^{n_0} \left[\frac{f^{(n_0)}(z_0)}{n_0!} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-n_0} \right]. \quad (3.2)$$

Soit $g(z)$ le terme entre crochets dans (3.2). Comme somme d'une série entière, g est continue et, en particulier, g tend, lorsque $z \to z_0$, vers $g(z_0) = f^{(n_0)}(z_0)/(n_0!) \neq 0$. Il existe donc $r \in]0; R[$ tel que $g(D(z_0; r[) \subset D(g(z_0); |g(z_0)|/2[$. Comme $0 \notin D(g(z_0); |g(z_0)|/2[$, g ne s'annule pas sur $D(z_0; r[$. D'après (3.2), f ne s'annule pas sur $D(z_0; r[\setminus \{z_0\}$. $\square$

Pour certaines fonctions non nulles $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, le résultat du théorème 3.1 est faux. On peut construire une telle fonction de sorte qu'elle soit nulle sur l'intervalle $[0; 1]$, par exemple.

Corollaire 3.1. *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique.*

1. *On suppose f non nulle. Pour tout ensemble compact $K \subset \Omega$, la fonction f admet un nombre fini (éventuellement nul) de zéros dans K. Par conséquent, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est au plus dénombrable.*

2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'image réciproque $f^{-1}(\alpha) = \{z \in \Omega\,;\, f(z) = \alpha\}$ de $\{\alpha\}$ par f est soit discret soit égal à Ω.*

3. *Si $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique et si l'ensemble $A = \{z \in \Omega\,;\, f(z) = g(z)\}$ admet un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$.*

Démonstration.

1. Supposons que $Z(f) \cap K$ soit infini. Il existe donc une suite injective $(z_k)_k$ d'éléments de $Z(f) \cap K$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(k)})_k$ tendant vers un $\ell \in K$. Comme f est continue sur K, $f(\ell) = \lim f(z_{\varphi(k)}) = 0$, puisque $z_{\varphi(k)} \in Z(f)$, pour tout k. Donc $\ell \in Z(f)$. Comme la suite $(z_{\varphi(k)})_k$ est injective, elle prend au plus une fois la valeur ℓ. En retirant éventuellement cette valeur de la suite, on a une suite $(z_{\psi(k)})_k$ d'éléments de $Z(f) \setminus \{\ell\}$ tendant vers ℓ. Donc $\ell \in \overline{Z(f) \setminus \{\ell\}}$ et, par le corollaire 1.1, ℓ est un point d'accumulation de $Z(f)$, ce qui contredit le théorème 3.1. Donc $Z(f) \cap K$ est fini.
   Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D(0; p]$ est compact, et comme
   $$Z(f) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(Z(f) \cap D(0; p]\right),$$
   $Z(f)$ est une réunion dénombrable d'ensembles finis (d'après ce qui précède) donc est au plus dénombrable.

2. Comme différence de fonctions analytiques, la fonction $f - \alpha$ est analytique et on a $Z(f - \alpha) = f^{-1}(\alpha)$. Supposons $f^{-1}(\alpha) \neq \Omega$. Alors $f - \alpha$ est non nulle et, par le théorème 3.1, $Z(f - \alpha) = f^{-1}(\alpha)$ est discret.

3. Comme différence de fonctions analytiques, la fonction $f - g$ est analytique et on a $Z(f - g) = A$. Soit $a \in \Omega$ un point d'accumulation de A. Il existe donc une suite $(z_k)_k$ d'éléments de A tendant vers a (cf. corollaire 1.1). Comme $f - g$ est continue et $a \in \Omega$, $(f - g)(a) = \lim(f - g)(z_k) = 0$, puisque $z_k \in A$, pour tout k. Donc $a \in Z(f - g) = A$. Si $f - g$ était non nulle alors, par le théorème 3.1, A serait discret. Contradiction avec le fait que $a \in A$ est un point d'accumulation de A. Donc $f = g$. $\square$

Théorème 3.2 (Principe du prolongement analytique). *Soit Ω un domaine, soit Ω_0 un ouvert non-vide inclus dans Ω et $f : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction analytique. Alors f admet au plus un prolongement à Ω qui est analytique sur Ω, i.e. si $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ sont analytiques et telles que, pour tout $z \in \Omega_0$, $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$, alors $f_1 = f_2$.*

Démonstration. Soit f_1, f_2 deux prolongements analytiques de f à Ω. Alors l'ensemble $A = \{z \in \Omega\,;\, f_1(z) = f_2(z)\}$ contient Ω_0. Soit $a \in \Omega_0$. Comme Ω_0 est un ouvert, a est un point d'accumulation de Ω_0 (cf. remarque 1.3) et donc aussi de A. Par le corollaire 3.1, $f_1 = f_2$. □

Remarque 3.3. *Si f est analytique non nulle alors l'égalité (3.2) montre que, pour tout zéro z_0 de f, il existe $n_0 \geq 1$, $r_0 > 0$ et une fonction $g : D(z_0; r_0[\longrightarrow \mathbb{C}$, ne s'annulant pas et somme de série entière, tels que $f(z) = (z - z_0)^{n_0} g(z)$ sur $D(z_0; r_0[$. On a vu que $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}\,;\, f^{(n)}(z_0) \neq 0\}$. On verra par la suite que la factorisation précédente est valable sur Ω pour une fonction analytique $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(z_0) \neq 0$. Par analogie avec les polynômes, on a la définition suivante.*

Définition 3.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ non nulle et $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$. Le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ est appelé l'ordre de z_0.*

3.3 Formule de Cauchy et analyticité des fonctions C_h^1.

L'objectif de cette partie est de montrer qu'une fonction C_h^1 sur un ouvert non vide est nécessairement analytique sur cet ouvert. Ce n'est qu'au chapitre 4 que l'on prouvera qu'il en est de même pour les fonctions holomorphes.

Donnons tout d'abord une idée de la stratégie que l'on va suivre. Considérons la preuve de la proposition 2.9, qui partant de la somme f d'une série entière établit la *formule de Cauchy* sur un cercle (2.13) :

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + re^{it}\big)}{z_0 + re^{it} - z}\, e^{it}\, dt\,.$$

Cette formule a un sens dès que f est continue sur un ouvert contenant $D(z_0; r]$ mais peut être fausse. Supposons qu'elle soit vraie pour une telle fonction. On voit que l'on peut reprendre la preuve de cette proposition 2.9 <u>en sens inverse</u> (la justification de la permutation de l'intégrale et de la série étant encore valable car la fonction continue f est bornée sur le cercle $C(z_0; r)$) pour aboutir à un DSE de f en z_0.
Si la fonction f n'est pas holomorphe sur $D(z_0; r[$, la formule de Cauchy précédente ne peut être valable pour elle car sinon elle serait égale sur ce disque à la somme d'une série entière, qui, elle, est forcément holomorphe.
On va voir ici que cette stratégie fonctionne pour f de classe C_h^1, c'est-à-dire holomorphe de $\mathbb{C}$-dérivée continue, sur un ouvert non vide. On commence donc par établir la formule de Cauchy sur des cercles pour de telles fonctions.

Proposition 3.4. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1_h. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. Soit $r \in]0; R[$ et $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$, qui est un lacet C^1 d'image $C(z_0; r)$ (cf. corollaire 2.4). Alors*

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\big(z_0 + re^{it}\big)}{z_0 + re^{it} - z}\, e^{it}\, \mathrm{d}t\,. \tag{3.3}$$

Si $z \in D(z_0; R[$ mais $z \notin D(z_0, r]$ alors

$$\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; 0\,. \tag{3.4}$$

Démonstration. Pour simplifier, on pose $\gamma := \gamma_{z_0;r}$. D'après le corollaire 2.4, γ est un lacet C^1 d'image $C(z_0; r) \subset D(z_0; R[\subset \Omega$. Pour $z \in D(z_0; r[$, on pose

$$a \;:=\; \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;-\; f(z)\,.$$

D'après (2.14) et la proposition 1.19, on a

$$a \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w\,.$$

Soit $w \in C(z_0; r)$. Comme f est C^1_h, la fonction $[0; 1] \ni s \mapsto f(sw + (1 - s)z)$ est C^1 de dérivée $[0; 1] \ni s \mapsto f'(sw + (1 - s)z)(w - z)$ (cf. proposition 1.25) donc

$$f(w) \;-\; f(z) \;=\; (w - z) \int_0^1 f'\big(sw + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}s\,.$$

D'où

$$2i\pi a \;=\; \int_\gamma \int_0^1 f'\big(sw + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}w \;=\; \int_0^{2\pi} \gamma'(t) \int_0^1 f'\big(s\gamma(t) + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\,.$$

D'après le théorème de Fubini pour les intégrales doubles,

$$2i\pi a \;=\; \int_0^1 \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\, f'\big(s\gamma(t) + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}s$$

et, d'après les propriétés des intégrales à paramètre,

$$[0; 1] \;\ni\; s \;\mapsto\; \int_0^{2\pi} \gamma'(t)\, f'\big(s\gamma(t) + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_\gamma f'\big(sw + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}w$$

est continue. Donc

$$2i\pi a \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \int_\gamma f'\big(sw + (1 - s)z\big)\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}s\,.$$

Comme, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $s \in [\varepsilon; 1]$, la fonction $D(z_0; R[\ni w \mapsto f(sw + (1 - s)z)/s$ est une primitive (holomorphe) de $D(z_0; R[\ni w \mapsto f'(sw + (1 - s)z)$ et comme γ est fermé, on obtient

$$2i\pi a \;=\; \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 0\, \mathrm{d}s \;=\; 0\,.$$

D'après la définition de a, on obtient (3.3).
Soit $z \in (D(z_0; R[\backslash D(z_0, r])$ et

$$a \;:=\; \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \;.$$

D'après (2.15) et la proposition 1.19, on a

$$a \;=\; \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\, \mathrm{d}w\,.$$

En reprenant à l'identique l'argument précédent, on obtient $a = 0$ soit (3.4). □

Corollaire 3.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C_h^1. Soit $z_0 \in \Omega$ et*

$$R_0 \;:=\; \sup\left\{R > 0\,;\; D(z_0; R[\subset \Omega\right\}.$$

Avec la convention $D(z_0; R_0[= \mathbb{C}$ si $R_0 = +\infty$, on a $D(z_0; R_0[\subset \Omega$, la formule de Cauchy (3.3) est valable pour tout $r \in]0; R_0[$ et f est DSE *en z_0, le développement étant valable sur $D(z_0; R_0[$. Le rayon de convergence du* DSE *est donc $\geq R_0$.*
En particulier, f est analytique sur Ω.

Démonstration. Soit $\mathcal{R} := \{R > 0\,;\, D(z_0; R[\subset \Omega\}$. Il est non vide car Ω est ouvert.
Cas où $R_0 = +\infty$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque $\sup \mathcal{R} = +\infty$, il existe un $R \in \mathcal{R}$ tel que $R > |z_0| + |z|$. On a donc $|z - z_0| \leq |z_0| + |z| < R$ donc $z \in D(z_0; R[\subset \Omega$. Donc Ω contient tout élément de $\mathbb{C}$, d'où $\Omega = \mathbb{C} = D(z_0; R_0[$, d'après la convention.
Cas où $R_0 < +\infty$. Soit $z \in D(z_0; R_0[$. On a donc $|z - z_0| < R_0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $R \in \mathcal{R}$ tel que $|z - z_0| < R \leq R_0$. Comme $z \in D(z_0; R[$ et $R \in \mathcal{R}$, $z \in \Omega$. D'où $D(z_0; R_0[\subset \Omega$ c'est-à-dire $R_0 \in \mathcal{R}$.
Dans les deux cas, on a montré que $D(z_0; R_0[\subset \Omega$.
Soit $r \in]0; R_0[$. Par la proposition 3.4, on a la formule de Cauchy (3.3). On suit la preuve de la proposition 2.9 à l'envers, ce qui est possible car, comme f est continue sur le compact $C(z_0; r)$, elle y est bornée donc la majoration (2.17) est valable et la série de fonctions considérée converge normalement sur $C(z_0; r)$. On obtient donc (2.16), c'est-à-dire un DSE de f en z_0 sur $D(z_0; r[$ tel que, pour tout n, le coefficient a_n est donné par une intégrale dépendant a priori de r. Mais il n'en est rien, car, sur $D(z_0; r[$, f est la somme d'une série entière donc est C_h^∞ et, pour tout n, $a_n = f^{(n)}(z_0)/(n!)$ (cf. (2.11)). De plus, par le corollaire 2.1, le rayon de convergence de ce DSE est $\geq r$, pour tous les $r \in]0; R_0[$, donc il est $\geq \sup]0; R_0[= R_0$. En particulier, ce DSE est valable sur $D(z_0; R_0[$.
Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, on a montré que f est analytique sur Ω. □

En reprenant les résultats sur les séries entières (cf. corollaire 2.2 et proposition 2.8) et en utilisant la proposition 3.4 et le corollaire 3.2, on obtient le

Théorème 3.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C_h^1 sur Ω. Alors f est analytique (donc C_h^∞) sur Ω. De plus, pour tout $z_0 \in \Omega$, on a, en définissant $R_0 := \sup\{R > 0; D(z_0; R[\subset \Omega\}$, les propriétés suivantes :*

1. *Le* DSE *$\sum a_n(z - z_0)^n$ de f en z_0 a un rayon de convergence $\geq R_0$ donc, pour tout $z \in D(z_0; R_0[$,*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z \,-\, z_0)^n\,.$$

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\forall\, r \in]0; R_0[\,, \quad a_n \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,,$$

où $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \longrightarrow \Omega$ est le lacet C^1 d'image $C(z_0; r)$ défini par $\gamma_{z_0;r} = z_0 + re^{it}$. En particulier, l'intégrale précédente ne dépend pas de r.

3. *Pour tout $r \in]0; R_0[$, on a la formule de Cauchy sur le cercle $C(z_0; r)$:*

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,, \quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

et la propriété

$$\forall\, z \in \big(D(z_0; R_0[\setminus D(z_0; r]\big)\,, \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;=\; 0\,.$$

On utilise la convention selon laquelle, pour $R_0 = +\infty$, $D(z_0; R_0[= \mathbb{C}$.

Exemple 3.6. *La fonction $f(z) = 1/z$ est de classe C^1_h sur $\mathbb{C}^*$. Par le théorème 3.3, elle est analytique sur $\mathbb{C}^*$. Dans l'exemple 3.4, on avait déjà prouvé l'analyticité f. Pour tout $z_0 \in \mathbb{C}^*$, on avait obtenu explicitement le* DSE *de f en z_0 et vu que son rayon de convergence est $|z_0|$. Ceci est cohérent avec le théorème 3.3 puisque le disque $D(z_0; |z_0|[$ est le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans $\mathbb{C}^*$.*

Remarque 3.4. *Grâce à ce théorème 3.3, on peut maintenant appliquer les résultats sur les fonctions analytiques aux fonctions dont on sait seulement qu'elles sont C^1_h.*

On est en mesure maintenant de donner une nouvelle preuve du résultat qui établit que, si une fonction holomorphe a une $\mathbb{C}$-dérivée nulle sur un ouvert connexe par arcs, alors cette fonction est constante.

Démonstration de la proposition 1.27. Comme f' est nulle sur Ω, f' y est continue donc f est C^1_h sur Ω. Par le théorème 3.3, f est analytique et C^∞_h sur Ω. Comme f' est nulle sur Ω, $f^{(n)}$ est aussi nulle sur Ω, pour $n \geq 1$. Comme Ω est un domaine, f est constante, d'après la proposition 3.3. □

On a montré dans la Section 3.1 (cf. proposition 3.2) que la somme et le produit de fonctions analytiques étaient analytiques. On n'a cependant pas parlé du quotient ni de la composée. Cela reste bien entendu vrai mais la preuve directement basée sur la définition de fonction analytique n'est pas facile à écrire. Avec le théorème 3.3, on en a une immédiate.

Proposition 3.5. *Quotient et composition.*

1. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytiques sur Ω telles que g ne s'annule pas. Alors f/g est analytique sur Ω.*

2. *Soit Ω_f et Ω_g deux ouverts non vides de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega_f \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique telle que $f(\Omega_f) \subset \Omega_g$ et $g : \Omega_g \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique. Alors $g \circ f$ est analytique sur Ω_f.*

Démonstration. Dans les deux cas, on sait que f et g sont C^1_h (cf. proposition 3.1). Par la proposition 1.25, f/g et $g \circ f$ sont C^1_h, suivant les cas. Par le théorème 3.3, elles sont aussi analytiques. □

3.4 Théorème de Liouville et principe du maximum.

On termine ce chapitre avec deux résultats importants sur les fonctions de classe C^1_h, le Théorème de Liouville et le principe du maximum. Comme on montrera que les fonctions holomorphes sont C^1_h (cf. chapitre 4), ces résultats pourront être appliqués à des fonctions dont on sait seulement qu'elles sont holomorphes.

3.4.1 Théorème de Liouville.

Théorème 3.4 (Liouville)**.** *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h et bornée alors f est constante.*

Remarque 3.5. *Ce résultat est faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si on suppose qu'elles sont la somme d'une série entière d'une variable réelle. Par exemple, la fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est la somme d'une série entière et est bornée mais n'est pas constante.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Comme f est C^1_h sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème 3.3, qui montre que f est C^∞_h sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule du 2 de ce théorème pour $z_0 = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{0;r}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int} \, \mathrm{d}t \, .$$

Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|f|$ est majorée par M. Par (1.10), on a donc

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{it}\right)\mathrm{e}^{-int}\right| \mathrm{d}t \leq \frac{M\,(n!)}{r^n} \, .$$

Comme $n \geq 1$, le terme de droite tend vers 0, quand $r \to +\infty$, donc, passage à la limite dans les inégalités, $0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq 0$. D'où $f^{(n)}(0) = 0$. Par la proposition 3.3, f est constante. $\square$

On donne comme application du théorème de Liouville une des nombreuses démonstrations du théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 3.5 (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. On raisonne par contraposition : on suppose que P ne s'annule pas et on montre qu'il est constant.
On a vu dans l'exemple 1.9 que P est C^1_h. Comme P ne s'annule pas, on y a aussi montré que la fonction $f = 1/P$ est C^1_h.
On montre que f est bornée. Le théorème de Liouville nous permettra alors de conclure.
Comme P est non nul, il existe $n \in \mathbb{N}$ et des complexes $a_0, \ldots, a_n$, avec a_n non nul, tels que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, z^k \, .$$

Donc, pour $z \neq 0$, on a

$$f(z) = \frac{1}{P}(z) = \frac{1}{z^n} \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}} \right)^{-1}$$

et on pose

$$s(z) \;:=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^{n-k}}\,.$$

Soit $R \geq 1$ tel que $|a_{n-1}|+\cdots+|a_0| \leq R|a_n|/2$ (c'est possible car $a_n \neq 0$). Pour $|z| > R \geq 1$, on a $|z|^{-k} \leq 1$, pour $k \in \mathbb{N}$, donc

$$|s(z)| \;\leq\; \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|z|} \;\leq\; \frac{|a_n|}{2}$$

et $|a_n| \leq |a_n + s(z)| + |-s(z)| \leq |a_n + s(z)| + |a_n|/2$. D'où $|a_n + s(z)| \geq |a_n|/2$ et $|f(z)| \leq 2/|a_n|$, lorsque $|z| > R$. Comme f est continue sur $D(0;R]$, elle y est bornée par un certain $M > 0$ donc $\max\left(M; 2/|a_n|\right)$ majore $|f|$. Comme f est C^1_h et bornée, elle est constante par le théorème 3.4. □

On a la généralisation suivante du théorème de Liouville.

Théorème 3.6. *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h et s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq C|z|^m$ alors f est une fonction polynôme de degré au plus m.*

Démonstration. Voir TD. □

Une conséquence de ce résultat est le résultat suivant.

Théorème 3.7. *Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^1_h telle que*

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| \;=\; +\infty\,, \quad \textit{dans le sens où}$$

$$\forall\, M > 0\,, \quad \exists\, R > 0\,; \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |z| \,>\, R \implies |f(z)| \,>\, M\,.$$

Alors f est une fonction polynôme.

Démonstration. Voir TD. □

3.4.2 Principe du maximum.

Proposition 3.6. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h (donc C^∞_h). Alors, pour tout $z_0 \in \Omega$, pour tout $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$ et tout $r \in]0; R[$, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + r\mathrm{e}^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t\,. \tag{3.5}$$

En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Cauchy

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \;\leq\; \frac{n!}{r^n} \sup_{z\in C(z_0;r)} |f(z)|\,. \tag{3.6}$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. D'après le Théorème 3.3, on a, pour tout $z \in D(z_0; R[$,

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n := f^{(n)}(z_0)/(n!)$. On prend un $r \in]0; R[$. D'après le corollaire 2.1, la série entière $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge normalement sur le compact $C(z_0; r)$ donc la suite croissante $(s_N)_N$, définie par

$$s_N := \sum_{n=0}^{N} \sup_{z \in C(z_0;r)} |a_n (z - z_0)|^n ,$$

converge vers un $s \in \mathbb{R}^+$. Par la proposition 1.14, $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge vers f, uniformément sur $C(z_0; r)$, donc la suite $(c_N)_N$, définie par

$$c_N := \sup_{z \in C(z_0;r)} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_0)^n \right| ,$$

converge vers 0.
Pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; 2\pi]$, on pose $g(t) := f(z_0 + re^{it})$ et

$$g_N(t) := \sum_{n=0}^{N} a_n (z_0 + re^{it} - z_0)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{int} .$$

On a

$$|g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 = \langle g_N(t) - g(t) ; g_N(t) \rangle + \langle g(t) ; g_N(t) - g(t) \rangle$$

donc

$$\left| |g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 \right| \leq \left| g_N(t) - g(t) \right| \left(|g_N(t)| + |g(t)| \right) \leq c_N \left(s_N + \sup_{C(z_0;r)} |f| \right) .$$

D'où

$$\sup_{t \in [0;2\pi]} \left| |g_N(t)|^2 - |g(t)|^2 \right| \leq c_N \left(s_N + \sup_{C(z_0;r)} |f| \right) \leq c_N \left(s + \sup_{C(z_0;r)} |f| \right) .$$

Puisque $(c_N)_N$ tend vers 0, la suite de fonctions $(|g_N|^2)_N$ converge donc vers $|g|^2$, uniformément sur $[0; 2\pi]$. Par la proposition 1.18, l'intégrale sur $[0; 2\pi]$ de $|g_N|^2$ tend vers celle de $|g|^2$, quand $N \to \infty$. Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(z_0 + re^{it}\right) \right|^2 \mathrm{d}t = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 \, \mathrm{d}t . \tag{3.7}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_N(t)|^2 \, \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \overline{a_n} \, a_m \, r^{m+n} \, e^{i(m-n)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \overline{a_n} \, a_m \, r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} \, a_n \, r^{2n} \, 2\pi = \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \, r^{2n} .
\end{aligned}$$

En reportant ceci dans (3.7), on voit que la série $\sum |a_n|^2 r^{2n}$ converge et que l'on a (3.5). Cette série étant à termes positifs, chaque terme est majoré par le terme de gauche de (3.5) donc, pour tout n,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|^2 r^{2n} \;\leq\; (n!)^2 \sup_{z\in C(z_0;r)} |f(z)|^2 \;\leq\; (n!)^2 \left(\sup_{z\in C(z_0;r)} |f(z)|\right)^2 ,$$

ce qui donne (3.6). □

On en déduit l'important résultat :

Théorème 3.8 (Principe du maximum)**.** *Soit Ω un domaine et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h. Si $|f|$ admet un maximum local en un $z_0 \in \Omega$ alors f est constante.*

Remarque 3.6. *Encore une fois ce résultat est totalement faux pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ même si la fonction est la somme d'une série entière comme le montre l'exemple de la fonction* sin.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. Supposons que $|f|$ admette un maximum local en z_0. Il existe alors $r' \in]0; R[$ tel que, pour tout $z \in D(z_0; r'[$, on ait $|f(z_0)| \geq |f(z)|$. Soit $r \in]0; r'[$. Comme $C(z_0; r) \subset D(z_0; r'[$, on a, pour tout $t \in [0; 2\pi]$, $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(z_0 + re^{it}\right)\right|^2 \mathrm{d}t \;\leq\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|^2 \,\mathrm{d}t \;=\; |f(z_0)|^2 .$$

Comme f est C^1_h, (3.5) est valide, par la proposition 3.6, donc

$$|f(z_0)|^2 \;\geq\; \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} \;=\; |f(z_0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right|^2 r^{2n} .$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc $f^{(n)}(z_0)\, r^n = 0$ et, comme $r > 0$, on a $f^{(n)}(z_0) = 0$. Par la proposition 3.3, f est constante. □

Définition 3.4. *Soit Ω une partie non vide de $\mathbb{C}$. On appelle bord, ou frontière, de Ω l'ensemble $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \mathring{\Omega}$. Si Ω est ouvert, on a $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.*

Exemple 3.7. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $\Omega = D(z_0; R[$ alors $\partial\Omega = C(z_0; R)$ (cf. TD).*

Théorème 3.9 (Principe du maximum, version globale)**.** *Soit Ω un domaine borné. Soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, qui est de classe C^1_h sur Ω. Alors f est bornée et*

$$\sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| . \tag{3.8}$$

Si, de plus, il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $|f(z_0)| = \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|$ alors f est constante.

Dans le cadre du théorème 3.9, il existe $M > 0$ tel que $\Omega \subset D(0; M[$ donc $\overline{\Omega} \subset D(0; M]$. Donc $\overline{\Omega}$ est aussi bornée. Comme elle est aussi fermée, $\overline{\Omega}$ est compacte. La première égalité dans (3.8) est donc déjà établie par le théorème 1.2. Ce que dit le théorème 3.9, c'est que le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ est atteint sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. Dans le cas où ce maximum est aussi atteint en $z_0 \in \Omega$, il est en fait atteint partout sur $\overline{\Omega}$, puisque f est constante.

Démonstration. On vient de vérifier que $\overline{\Omega}$ est un compact et que la borne supérieure de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$ est atteinte. Comme $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$, l'intersection de deux fermés, $\partial\Omega$ est fermé. Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$, qui est bornée, $\partial\Omega$ est borné. Il est donc compact. Par le théorème 1.2, la borne supérieure de $|f|$ sur $\partial\Omega$ est aussi atteinte. Comme $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$,

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;=\; \sup_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)| \;\geq\; \sup_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;=\; \max_{z\in\partial\Omega} |f(z)|\,. \tag{3.9}$$

Soit z_0 un maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$.
<u>Cas où $z_0 \in \partial\Omega$.</u> Alors

$$\max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;\geq\; |f(z_0)| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|\,. \tag{3.10}$$

<u>Cas où $z_0 \in \Omega$.</u> Comme z_0 est aussi un maximum local de f sur le domaine Ω, f est constante sur Ω égale à un $c \in \mathbb{C}$, par le théorème 3.8. Pour $z \in \overline{\Omega}$, il existe une suite $(z_k)_k$ d'éléments de Ω telle que $z_k \to z$. Par continuité de f, $f(z) = \lim f(z_k)$ et, comme $z_k \in \Omega$, $f(z_k) = c$, pour tout k, on obtient $f(z) = c$. f est donc constante sur $\overline{\Omega}$. En particulier,

$$\max_{z\in\partial\Omega} |f(z)| \;=\; |c| \;=\; \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|\,.$$

Dans les deux cas, on a montré (3.10), ce qui avec (3.9) donne (3.8). $\square$

CHAPTER 4

ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES.

Jusqu'à présent, on a établi que, pour une fonction f sur un ouvert, on a les équivalences : f est C^1_h si et seulement si f est C^∞_h si et seulement si f est analytique. Si f est C^1_h alors, par définition, f est holomorphe. Dans ce chapitre, on va prouver la réciproque, en montrant : si f est holomorphe alors f est analytique.
Pour ce faire, on va utiliser des primitives. Alors que, pour toutes fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I, on a automatiquement des primitives que l'on peut construire en utilisant des intégrales, la situation est différente pour les fonctions complexes d'une variable complexe. Certes, certaines fonctions, comme les polynômes, admettent des primitives (cf. exemple 1.10) mais la fonction $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z$, qui est pourtant C^∞_h, n'en a pas sur $\mathbb{C}^*$ (cf. exemple 1.11). Il va donc être important de trouver un cadre dans lequel l'existence de primitives est assurée.
On donnera aussi des résultats sur les suites et séries de fonctions holomorphes ainsi que pour des intégrales dépendant d'un paramètre complexe.

4.1 Fonctions holomorphes, primitives et analyticité.

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Supposons que f admette une primitive F. Dans ce cas, F est $\mathbb{C}$-dérivable et $F' = f$. Comme f est continue, F est C^1_h et donc analytique, par le théorème 3.3. Près de tout point, F est la somme d'une série entière donc sa dérivée f aussi (cf. proposition 2.7). Donc f est analytique donc holomorphe.
Ceci explique pourquoi la conjugaison complexe $\bar{\cdot}$, considérée dans l'exemple 1.12, ne peut avoir de primitive puisqu'elle n'est pas holomorphe (cf. remarques 1.13 et 1.16).
Le fait d'être holomorphe est donc nécessaire pour avoir une primitive mais ce n'est pas suffisant comme le montre l'exemple de la fonction $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par $f(z) = 1/z$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Pour construire une primitive F de f, il est naturel (puisque c'est ce que l'on fait pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de fixer un point $z_0 \in \Omega$ et d'utiliser une intégrale :

$$F(z) \; = \; \int_{\gamma_z} f(w)\, \mathrm{d}w$$

le long d'un chemin γ_z allant de z_0 à z en restant dans Ω. Il y a alors immédiatement plusieurs questions qui se posent:

1. Que fait-on s'il n'existe pas de chemin allant de z_0 à z ? Cela ne se produit pas si on travaille dans un ouvert Ω connexe par arcs.
2. S'il existe un tel chemin, il y a d'autres. On a vu sur des exemples que la valeur de l'intégrale peut dépendre du chemin choisi. Dans ce cas, on doit préciser le chemin choisi pour que F soit bien définie.
3. Définit-on ainsi une primitive de f ?

On rappelle la définition d'un ensemble étoilé, voir la Définition 1.16 à la fin de la Section 1.1. On a vu qu'un ensemble étoilé est connexe par arcs (cf. proposition 1.11).

Définition 4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $z_0 \in \Omega$. On dit que Ω est étoilé par rappor à z_0 si, pour tout $z \in \Omega$, on a $[z_0; z] \subset \Omega$. On dit que Ω est étoilé s'il existe un $z_1 \in \Omega$ tel que Ω est étoilé par rappor à z_1.*

Remarque 4.1. *Exemples et contre-exemples.*

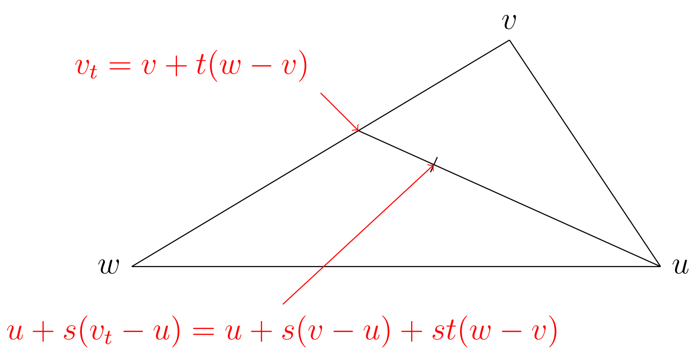
1. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Le disque $D(z_0; R[$ est étoilé par rapport à z_0. En fait, comme $D(z_0; R[$ est convexe, il est étoilé par rapport à tout $z_1 \in D(z_0; R[$. Ceci est aussi vrai pour le disque fermé $D(z_0; R]$. On a déjà signalé ces faits dans la remarque 1.8.*
2. *$\mathbb{C}^*$ n'est pas étoilé.*
3. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > r > 0$. L'ensemble $D(z_0; R[\setminus D(z_0; r]$ n'est pas étoilé.*
4. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\theta := \mathbb{C} \setminus e^{i\theta}\mathbb{R}^+$. Soit $r > 0$. Ω_θ est étoilé par rapport à $z_0 = -re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$.*

Voir TD.

Définition 4.2. *Soit $u, v, w \in \mathbb{C}$. On note par $T(u; v; w)$ le triangle (plein) de sommets u, v, w, défini par*

$$T(u; v; w) \ := \ \left\{ s(tw + (1-t)v) + (1-s)u \,;\, (s; t) \in [0; 1]^2 \right\}.$$

C'est un compact comme image par une application continue du compact $[0; 1]^2$. Le bord de $T(u; v; w)$, noté $\partial T(u; v; w)$, est la réunion $= [u; v] \cup [v; w] \cup [w; u]$ des côtés du triangle. Soit γ la concaténation des chemins C^1 $\psi_{u;v}$, $\psi_{v;w}$ et $\psi_{w;u}$ (cf. exemple 1.2). C'est un chemin (cf. proposition 1.17).



Remarque 4.2. *Dans le cadre de la définition 4.2, on peut vérifier que l'ensemble* $\partial T(u;v;w)$ *est bien le bord, au sens topologique du terme, c'est-à-dire* $\overline{T}(u;v;w) \setminus \mathring{T}(u;v;w) = T(u;v;w) \setminus \mathring{T}(u;v;w) = \partial T(u;v;w)$. *Voir TD.*

Le théorème qui suit permet de caractériser les fonctions qui admettent des primitives sur des ouverts étoilés.

Théorème 4.1. *Soit* Ω *un ouvert étoilé et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue. Alors* f *admet une primitive sur* Ω *si et seulement si, pour tout triangle* $T(u,v,w) \subset \Omega$*, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Ici, γ *est le paramétrage du bord* $\partial T(u;v;w)$ *introduit dans la définition 4.2.*

Remarque 4.3. *Si* Ω *est étoilé, on peut vérifier que l'inclusion* $\partial T(u;v;w) \subset \Omega$ *implique l'inclusion* $T(u;v;w) \subset \Omega$. *Voir TD.*

Démonstration du théorème 4.1. Si f admet une primitive sur Ω alors, le paramétrage γ du bord d'un triangle $T(u;v;w) \subset \Omega$ étant fermé, l'intégrale de f le long de γ est nulle par la proposition 1.26.
Supposons maintenant que, pour tout triangle $T(u;v;w) \subset \Omega$, l'intégrale de f le long de γ est nulle. Soit $z_0 \in \Omega$ un point par rapport auquel Ω est étoilé. Soit $z \in \Omega$, on a $[z_0;z] \subset \Omega$. On pose

$$F(z) \;:=\; \int_{\psi_{z_0;z}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0;r[\subset \Omega$. Soit $h \in \mathbb{C}$ avec $|h| < r$. Comme $z+h \in D(z;r[$, $z+h \in \Omega$ et, comme Ω est étoilé par rapport à z_0, $[z_0;z+h] \subset \Omega$ et

$$F(z+h) \;:=\; \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme $D(z_0;r[$ est convexe et inclu dans Ω, on a $[z;z+h] \subset D(z_0;r[\subset \Omega$. Donc le bord du triangle $T(z_0;z;z+h)$ est inclus dans Ω. Comme Ω est étoilé, $T(z_0;z;z+h)$ est inclus dans Ω, par la remarque 4.3. D'après l'hypothèse, l'intégrale de f le long du paramétrage γ de $\partial T(z;z_0;z+h)$ est nulle. Comme γ est la concaténation $\psi_{z;z_0} \mathring{+} \psi_{z_0;z+h} \mathring{+} \psi_{z+h;z}$, on a, d'après la proposition 1.21,

$$0 \;=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \int_{\psi_{z;z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\psi_{z+h;z}} f(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

Donc, par la proposition 1.20,

$$\begin{aligned} F(z+h) \,-\, F(z) \;&=\; \int_{\psi_{z_0;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\psi_{z;z_0}} f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; -\int_{\psi_{z+h;z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned}$$

Comme
$$\int_{\psi_{z;z+h}} 1\,\mathrm{d}w \;=\; \int_0^1 1\cdot\psi'_{z;z+h}(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 1\cdot(z+h-z)\,\mathrm{d}t \;=\; h\,,$$
on a, par la proposition 1.19,
$$\begin{aligned} F(z+h) \,-\, F(z) \,-\, h\,f(z) \;&=\; \int_{\psi_{z;z+h}} f(w)\,\mathrm{d}w \,-\, \int_{\psi_{z;z+h}} f(z)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_{\psi_{z;z+h}} \big(f(w) \,-\, f(z)\big)\,\mathrm{d}w\;. \end{aligned}$$
Par la proposition 1.22, on en déduit que
$$\big|F(z+h) \,-\, F(z) \,-\, h\,f(z)\big| \;\le\; L\big(\psi_{z;z+h}\big) \sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)|\,. \tag{4.1}$$
Soit $\epsilon > 0$. Comme f est continue en z, par hypothèse, il existe $\delta\in\,]0;r]$ tel que
$$\forall\, w\in\mathbb{C} \quad |w \,-\, z| \,<\, \delta \;\Longrightarrow\; |f(w) \,-\, f(z)| \;<\; \frac{\epsilon}{2}\,.$$
Donc, pour $|h| < \delta$, on a
$$\sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)| \;\le\; \frac{\epsilon}{2} \;<\; \epsilon\,.$$
La fonction
$$h \;\mapsto\; \sup_{w\in[z;z+h]} |f(w) \,-\, f(z)|$$
tend donc vers 0 en 0. Comme $L(\psi_{z;z+h}) = |h|$, on déduit de (4.1) que F est $\mathbb{C}$-derivable en z de $\mathbb{C}$-dérivée $f(z)$. La fonction F est donc une primitive de f sur Ω. $\square$

Remarque 4.4. *Comme on l'a vu à travers la preuve, si on sait que Ω est étoilé par rapport à z_0, on peut se restreindre dans le théorème précédent aux triangles dont z_0 est l'un des sommets. Par ailleurs, le théorème montre que, au moins dans un ouvert étoilé, si l'intégrale le long du bord de n'importe quel triangle est nulle alors la fonction admet une primitive et donc l'intégrale le long de n'importe quel chemin fermé est nulle: si on sait ce qu'il se passe pour les triangles, on récupère ce qu'il se passe pour tous les chemins fermés.*

Le théorème précédent a l'avantage de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un ouvert étoilé Ω admette une primitive. Le point négatif est que cette condition semble difficile à vérifier dans la pratique: il faut calculer l'intégrale de f le long du bord de tous les triangles inclus dans Ω. On va voir qu'en fait, il suffit que f soit $\mathbb{C}$-dérivable pour que cette condition soit satisfaite.

Théorème 4.2 (Goursat)**.** *Soit Ω un ouvert non vide et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ holomorphe. Alors, pour tous $u,v,w\in\mathbb{C}$ tels que $T(u;v;w)\subset\Omega$, on a*
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,. \tag{4.2}$$
Ici, γ est le paramétrage du bord $\partial T(u;v;w)$ de $T(u;v;w)$, introduit dans la définition 4.2.

Remarque 4.5. *Attention, on demande que* <u>*le triangle plein $T(u;v;w)$ soit inclus dans Ω*</u> *et pas juste son bord, voir l'exemple ci-dessous.*

Exemple 4.1. *Soit $\Omega = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = 1/z$. La fonction f est bien holomorphe sur Ω. Prenons le triangle de sommets $a = 1$, $b = \mathrm{e}^{i2\pi/3}$ et $c = \mathrm{e}^{i4\pi/3}$. Le bord du triangle est dans Ω mais pas son intérieur (0 est à l'intérieur du triangle). On va calculer l'intégrale de f le long du triangle. On a*

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\psi_{a;b}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{b;c}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{c;a}} \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

Les segments $[a;b]$ et $[c;a]$ sont inclus dans $\Omega_{]-\pi;\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive, voir la remarque 2.10, la détermination principale du logarithme. On a donc

$$\int_{\psi_{a;b}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\psi_{c;a}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}(b) - \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(a) - \mathrm{Log}(c) = i\frac{2\pi}{3} - \left(-i\frac{2\pi}{3}\right) = i\frac{4\pi}{3}.$$

Enfin $[b;c]$ est inclus dans $\Omega_{]0;2\pi[}$ sur lequel la fonction f admet comme primitive la fonction Log_0. Donc

$$\int_{\psi_{b;c}} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{Log}_0(c) - \mathrm{Log}_0(b) = i\frac{4\pi}{3} - i\frac{2\pi}{3} = i\frac{2\pi}{3}.$$

D'où

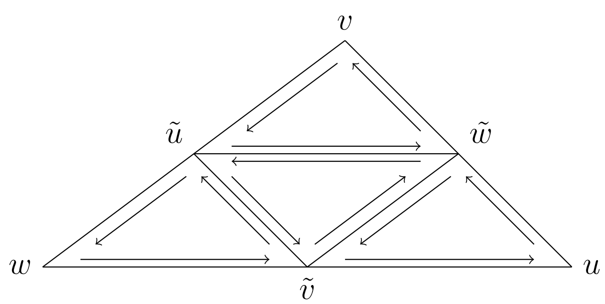
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = i\frac{4\pi}{3} + i\frac{2\pi}{3} = 2i\pi \neq 0.$$

On pourra noter que la valeur de l'intégrale est $2i\pi$, la même que dans le 3. de l'exemple 1.7. Ce n'est pas un hasard, voir la partie 4.2.

Démonstration du théorème 4.2. On rappelle que, pour tout $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$, on note par $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ le chemin C^1 défini par $\psi_{z_1;z_2}(t) = tz_2 + (1-t)z_1$, un paramétrage du segment $[z_1;z_2]$. On note que $\psi_{z_2;z_1} = (\psi_{z_1;z_2})_{\mathrm{opp}}$.
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $T := T(u;v;w) \subset \Omega$. Soit γ_T le paramétrage du bord $\partial T(u;v;w)$ de $T(u;v;w)$, introduit dans la définition 4.2. C'est la concaténation des chemins $\psi_{u;v}$, $\psi_{v;w}$ et $\psi_{w;u}$, dans cet ordre. Soit $\tilde{u} := (v+w)/2$, $\tilde{v} := (u+w)/2$ et $\tilde{w} := (u+v)/2$. On décompose $T(u;v;w)$ en quatre sous-triangles de la façon suivante :

$$T(u;v;w) = T(u;\tilde{w};\tilde{v}) \cup T(\tilde{u};\tilde{v};\tilde{w}) \cup T(\tilde{u};\tilde{w};v) \cup T(\tilde{u};w;\tilde{v})$$

soit



En utilisant les propositions 1.21 et 1.20, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\\
=\ &\int_{\psi_{u;v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;u}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
=\ &\int_{\psi_{u;\tilde w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde w;v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;\tilde u}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde u;w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;\tilde v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde v;u}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
=\ &\int_{\psi_{u;\tilde w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde w;\tilde v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde v;\tilde w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde v;u}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&+ \int_{\psi_{\tilde w;v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{v;\tilde u}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde u;\tilde w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde w;\tilde u}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
&+ \int_{\psi_{\tilde u;w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{w;\tilde v}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde v;\tilde u}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde u;\tilde v}} f(z)\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

On est passé de la troisième ligne à la quatrième en regroupant le premier et le dernier terme et en ajoutant 0, en regroupant les deuxième et troisième termes et en ajoutant 0, en regroupant les deux termes restant et en ajoutant 0.
On note par $\gamma_{T(a;b;c)}$ le paramétrage du bord du triangle $T(a;b;c)$ (selon la définition 4.2). On a

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\\
=\ &\int_{\gamma_{T(u;\tilde w;\tilde v)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde v;\tilde w}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde w;v;\tilde u)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde w;\tilde u}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde u;w;\tilde v)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{\tilde u;\tilde v}} f(z)\,\mathrm{d}z\\
=\ &\int_{\gamma_{T(u;\tilde w;\tilde v)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde w;v;\tilde u)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde u;w;\tilde v)}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_{T(\tilde u;\tilde v;\tilde w)}} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des quatre triangles inclus dans T qui apparaissant dans la dernière formule. Soit $T_1 \in \mathcal{E}_1$ tel que

$$\forall\, T \in \mathcal{E}_1\,, \quad \left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \left|\int_{\gamma_{T_1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|.$$

En notant $T_0 = T = T(u;v;w)$, on a donc, par (4.3),

$$\left|\int_{\gamma_{T_0}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; \sum_{T\in\mathcal{E}_1} \left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; 4\left|\int_{\gamma_{T_1}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \qquad (4.4)$$

On remarque la longueur de γ_{T_1} vérifie $L(\gamma_{T_1}) = L(\gamma_{T_0})/2$. Soit $(u_0;v_0;w_0) := (u;v;w)$ et soit $(u_1;v_1;w_1)$ les sommets de T_1.
Supposons construits, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, des triangles $T_0 \supset T_1 \supset \cdots \supset T_n$ tels que, pour tout $j \in (\mathbb{N} \cap [0;n-1])$, $T_j = T(u_j;v_j;w_j)$, $L(\gamma_{T_{j+1}}) = L(\gamma_{T_j})/2$ et

$$\left|\int_{\gamma_{T_j}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; 4\left|\int_{\gamma_{T_{j+1}}} f(z)\,\mathrm{d}z\right|. \qquad (4.5)$$

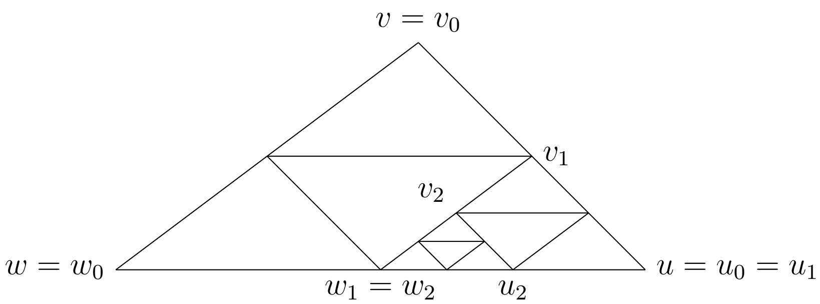
On reprend l'argument menant à (4.4) en remplaçant $T_0 = T$ par T_n, le nouveau triangle T_1 par $T_{n+1} = T(u_{n+1}; v_{n+1}; u_{n+1})$ et $\mathcal{E}_1$ par

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{n+1} \ &:= \Big\{ T\Big(u_n; \frac{u_n+v_n}{2}; \frac{u_n+w_n}{2}\Big) \, ; \ T\Big(\frac{u_n+v_n}{2}; v_n; \frac{v_n+w_n}{2}\Big) \\ &:= \ T\Big(\frac{v_n+w_n}{2}; w_n; \frac{u_n+w_n}{2}\Big) \, ; \ T\Big(\frac{v_n+w_n}{2}; \frac{u_n+w_n}{2}; \frac{u_n+v_n}{2}\Big) \Big\} \, .\end{aligned}$$

Soit $T_{n+1} \in \mathcal{E}_{n+1}$ tel que

$$\forall\, T \in \mathcal{E}_{n+1} \, , \quad \Big| \int_{\gamma_T} f(z)\, \mathrm{d}z \Big| \ \leq \ \Big| \int_{\gamma_{T_{n+1}}} f(z)\, \mathrm{d}z \Big| \, .$$

Donc (4.4), avec T_0 remplacé par T_n, $\mathcal{E}_1$ remplacé par $\mathcal{E}_{n+1}$ et T_0 remplacé par T_{n+1}, est valide. Enfin, on a aussi $L(\gamma_{T_{n+1}}) = L(\gamma_{T_n})/2$.
Par récurrence, on a construit une suite décroissante de triangles $(T_n)_n$ avec $T_0 = T$ vérifiant, pour tout j, $L(\gamma_{T_{j+1}}) = L(\gamma_{T_j})/2$ et (4.5).



Par récurrence, on vérifie que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $L(\gamma_{T_n}) = L(\gamma_T)2^{-n} > 0$ et

$$\Big| \int_{\gamma_T} f(z)\, \mathrm{d}z \Big| \ \leq \ 4^n \Big| \int_{\gamma_{T_n}} f(z)\, \mathrm{d}z \Big| \, . \tag{4.6}$$

Pour tout n, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq L(\gamma_{T_n}) = L(\gamma_T)2^{-n}$. La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge donc absolument donc converge vers un z_0'. Pour $z_0 := z_0' + u_0$, on a, pour tout $n > 0$,

$$u_n \ - \ z_0 \ = \ \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \ - \ z_0' \ \to 0 \, ,$$

quand $n \to \infty$. Comme

$$|v_n \ - \ u_n| \ + \ |w_n \ - \ u_n| \ \leq \ L\big(\gamma_{T_n}\big) \ = \ L(\gamma_T)2^{-n} \ \to \ 0 \, ,$$

quand $n \to \infty$, on en déduit que les suites $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent aussi vers z_0. Comme les termes $u_n \in T_n \subset T_0 = T$, pour tout n, et comme T est fermé, $z_0 \in T$. Comme $T \subset \Omega$ et Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset \Omega$. Par hypothèse, f est holomorphe en z_0 donc il existe une fonction $\eta : D(z_0; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tendant vers 0 en z_0 telle que

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\, , \quad f(z) \ = \ f(z_0) \ + \ f'(z_0)\,(z - z_0) \ + \ (z - z_0)\, \eta(z) \, .$$

En utilisant cela, le fait que la fonction polynomiale $z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)$ admet une primitive, le fait que les chemins considérés sont fermés et les propositions 1.26, 1.19 et 1.22, on obtient, pour tout n,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_{T_n}} f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_{\gamma_{T_n}} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_{T_n}} \big(f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)\big)\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int_{\gamma_{T_n}} \Big(f(z) - \big(f(z_0) + f'(z_0)\,(z - z_0)\big)\Big)\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int_{\gamma_{T_n}} (z - z_0)\,\eta(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq L\big(\gamma_{T_n}\big) \sup_{z \in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)| \\ &\leq \frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^n} \sup_{z \in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)|\,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Comme la suite $(T_p)_p$ est décroissante, z_0 est aussi la limite de la suite $(u_p)_{p \geq n}$ d'éléments de T_n et, comme T_n est fermé, $z_0 \in T_n$. Pour $z \in T_n$, on a $|z - z_0| \leq L(\gamma_{T_n})/2$ (cf. TD). Donc

$$\sup_{z \in T_n} |z - z_0|\,|\eta(z)| \leq \frac{1}{2} L\big(\gamma_{T_n}\big) \sup_{z \in T_n} |\eta(z)| = \frac{1}{2}\,\frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^n} \sup_{z \in T_n} |\eta(z)|\ .$$

On déduit de (4.6), (4.7) et de l'inégalité précédente que, pour tout n,

$$\left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 4^n \frac{L\big(\gamma_T\big)^2}{2 \times 4^n} \sup_{z \in T_n} |\eta(z)| = \frac{L\big(\gamma_T\big)^2}{2} \sup_{z \in T_n} |\eta(z)|\,. \tag{4.8}$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme η tend vers 0 en z_0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, z \in D(z_0; r[\,,\ |z - z_0| < \delta \implies |\eta(z)| < \frac{2\epsilon}{L\big(\gamma_T\big)^2}\,.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $L(\gamma_T)2^{-N-1} < \delta$. Pour $n \geq N$, on a, pour $z \in T_n$,

$$|z - z_0| \leq \frac{L\big(\gamma_{T_n}\big)}{2} = \frac{L\big(\gamma_T\big)}{2^{n+1}} < \delta$$

donc $|\eta(z)| < 2\epsilon/L(\gamma_T)^2$ et donc

$$\sup_{z \in T_n} |\eta(z)| \leq \frac{2\epsilon}{L\big(\gamma_T\big)^2}\,.$$

En reportant dans (4.8), on obtient

$$\left|\int_{\gamma_T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \epsilon\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a prouvé (4.2). □

La première conséquence du Théorème de Goursat est que, dans un ouvert étoilé, toutes les fonctions holomorphes ont des primitives.

Théorème 4.3. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f admet une primitive sur Ω. En particulier, pour tout chemin fermé γ dont l'image est incluse dans Ω,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Démonstration. Comme f est holomorphe, son intégrale le long du bord de n'importe quel triangle inclus dans Ω est nulle, d'après le théorème de Goursat. Puisque Ω est étoilé, le théorème 4.1 garantit que f admet une primitive sur Ω. D'après la proposition 1.26, on a le résultat, puisque γ est fermé. □

Remarque 4.6. *L'hypothèse sur Ω est importante ! Dans l'exemple 1.7, la fonction $f(z) = 1/z$ est holomorphe mais son intégrale le long du cercle $C(0;1)$ n'est pas nulle. Cette hypothèse n'est pas toujours indispensable. La fonction $g : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1/z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, qui n'est pas étoilé, mais son intégrale le long de n'importe quel chemin fermé est nulle puisque g admet $-f$ comme primitive (cf. proposition 1.26).*

Corollaire 4.1. *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Pour tous $z_1, z_2 \in \Omega$ et tous chemins γ_1, γ_2 à valeurs dans Ω et allant de z_1 à z_2, on a*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Démonstration. Soit $\gamma = \gamma_1 \mathring{+} (\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$, qui est bien défini car γ_1 s'arrête en z_2 et $(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$ commence en z_2. C'est un chemin (cf. proposition 1.17) qui est à valeurs dans Ω car γ_1 et γ_2 le sont. Comme γ_1 commence en z_1 et $(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}$ s'arrête en z_1, γ est fermé. Comme f est holomorphe sur Ω, qui est étoilé, le théorème 4.3 donne

$$0 \;=\; \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{(\gamma_2)_{\mathrm{opp}}} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

(cf. proposition 1.20), ce qui donne le résultat. □

Une seconde conséquence du Théorème de Goursat est une amélioration du Théorème 3.3 : il suffit de supposer que f est holomorphe, pas besoin de demander que sa dérivée f' soit continue.

Théorème 4.4. *Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors f est analytique.*

Démonstration. On suppose f holomorphe. On veut montrer que f est DSE en tout $z_0 \in \Omega$. Soit donc $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset \Omega$. Pour tout triangle $T(a;b;c)$ inclus dans $D(z_0; r[$, $T(a;b;c)$ est inclus dans Ω et, par le théorème de Goursat (théorème 4.2), l'intégrale de f le long du paramétrage du bord de $T(a;b;c)$ est nulle. Comme $D(z_0; r[$ est étoilé, le théorème 4.1 garantit que f admet une primitive F sur $D(z_0; r[$. La $\mathbb{C}$-dérivée $F' = f$ de F est holomorphe donc continue. Donc F est C^1_h sur $D(z_0; r[$. Par le théorème 3.3, F est analytique donc DSE en z_0. Par la proposition 2.7, sa $\mathbb{C}$-dérivée $F' = f$ l'est aussi. □

Remarque 4.7. *Comme une fonction holomorphe est analytique, elle vérifie toutes les propriétés vues au chapitre précédent : formule de Cauchy, zéros isolés, prolongement analytique, principe du maximum, théorème de Liouville.*
La validité de l'unicité du prolongement analytique pour les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables justifie l'utilisation du vocable "holomorphe" pour désigner la $\mathbb{C}$-dérivabilité. Le mot "holomorphe" vient du grec holos "entier" et morphê "forme". L'unicité du prolongement analytique dit précisément que la "forme" globale de la fonction est déterminée par sa "forme" locale, sa forme est donc "entière".

Remarque 4.8. *On a vu dans le théorème 4.3 que, sur un ouvert étoilé, toute fonction holomorphe possède une primitive. Le théorème 4.4 ci-dessus montre que cette condition d'holomorphie est en fait nécessaire pour avoir une primitive. En effet, si une fonction f admet une primitive F, alors F est holomorphe donc analytique. Sa dérivée $F' = f$ est donc aussi analytique et en particulier holomorphe (cf. définition 3.2).*
Conclusion : *dans un ouvert étoilé, les fonctions qui admettent des primitives sont exactement les fonctions holomorphes.*
Attention, on rappelle que, si Ω n'est pas étoilé, alors une fonction holomorphe peut ne pas avoir de primitive.

Il se trouve que la réciproque du théorème de Goursat est vraie :

Théorème 4.5 (Morera)**.** *Soit Ω un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si, pour tous $(a;b;c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $T(a;b;c) \subset \Omega$, l'intégrale de f le long du paramétrage du bord de $T(a;b;c)$ est nulle, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0;r[\subset \Omega$. Comme $D(z_0;r)[$ est étoilé, l'hypothèse et le théorème 4.1 assurent que f admet une primitive F sur $D(z_0;r[$. Comme dans la preuve du théorème 4.4, on montre que f est analytique sur Ω donc holomorphe sur Ω (cf. définition 3.2). □

Remarque 4.9. *Dans tout ce qu'on a fait dans cette section, on peut généraliser un peu l'hypothèse sur Ω et remplacer la notion d'ouvert étoilé par celle d'ouvert dit* simplement connexe*. L'idée de Ω simplement connexe est qu'il n'y a pas de "trou à l'intérieur" de Ω. Autrement dit, quel que soit le lacet qu'on prenne dans Ω, tout ce qui est à "l'intérieur du lacet" est dans Ω. La notion d'ouvert étoilé est amplement suffisante pour ce qu'on fera par la suite, on se restreindra donc à ce cadre plus simple à définir proprement.*

On termine ce paragraphe par une application du théorème 4.3. On va l'utiliser pour calculer la *transformée de Fourier* de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp(-x^2/2)$. Celle-ci joue un rôle important en mathématiques et en particulier en théorie des probabilités (voir le cours de Probabilités du S6).
On donne tout d'abord la définition de la transformée de Fourier d'une fonction. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable, i.e. telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

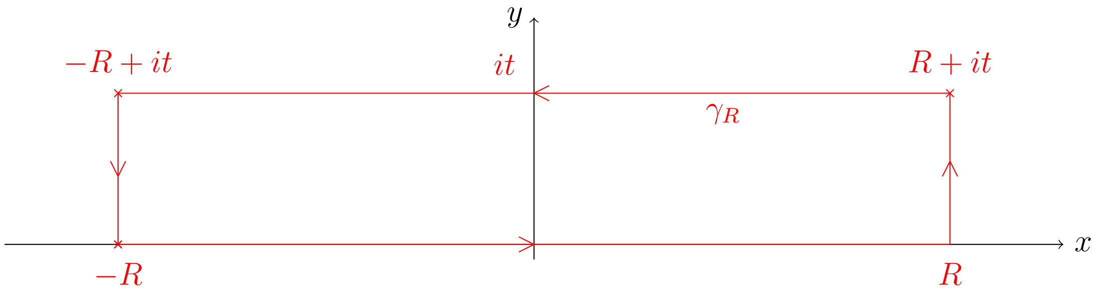
soit convergente. La transformée de Fourier de g est la fonction $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{g}(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\, g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

l'intégrale précédente étant absolument convergente. Le préfacteur $1/\sqrt{2\pi}$ est une normalisation qui peut varier selon les livres.
On peut vérifier que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est donc bien définie. On peut aussi montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{2\pi}\,.$$

Cela donne $\hat{f}(0) = 1$. Pour déterminer explicitement $\hat{f}$, on introduit la fonction holomorphe $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $h(z) = \exp(-z^2/2)$. On fixe un $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $R > 0$, soit γ_R la concaténation des chemins rectilignes $\psi_{-R;R}$, $\psi_{R;R+it}$, $\psi_{R+it;-R+it}$ et $\psi_{-R+it;-R}$. C'est un chemin (cf. proposition 1.17).



Comme h est holomorphe sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, on peut appliquer le théorème 4.3 à h ce qui donne, pour tout $R > 0$, comme le chemin γ_R est fermé,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_R} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{\psi_{-R;R}} h(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{R;R+it}} h(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{R+it;-R+it}} h(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_{-R+it;-R}} h(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x + \int_0^t \mathrm{e}^{-(R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s - \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \mathrm{e}^{-(-R+is)^2/2} i\,\mathrm{d}s\,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Pour $R > 0$, on a

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-(x+it)^2/2}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

et, comme f est intégrable,

$$\lim_{R\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-itx}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}\,\hat{f}(t)\,.$$

Soit $\sigma \in \{-1; 1\}$. On a

$$\left|\sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-(\sigma R+is)^2/2}\, i\,\mathrm{d}s\right| \;\leq\; \int_0^{|t|} \left|\mathrm{e}^{-(\sigma R+is)^2/2}\right| \mathrm{d}s \;=\; \int_0^{|t|} \mathrm{e}^{(-R^2+s^2)/2}\,\mathrm{d}s \;\leq\; |t|\,\mathrm{e}^{(-R^2+t^2)/2}\,,$$

qui tend vers 0, quand $R \to +\infty$. Donc

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_0^t e^{-(R+is)^2/2} i\,ds - \int_0^t e^{-(-R+is)^2/2} i\,ds\right) = 0\,.$$

On obtient donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, en passant à la limite $R \to +\infty$ dans (4.9),

$$0 = \sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{t^2}{2}}\, \hat{f}(t) + 0 \quad \text{soit} \quad \hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)\,,$$

i.e. la transformée de Fourier de f est elle-même.

4.2 Indice d'un point par rapport à un chemin fermé.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it} \in \mathbb{C}$, qui est un lacet C^1 d'image $C(z_0; r)$ (cf corollaire 2.4). On a vu dans la proposition 2.9 (cf. (2.14) et (2.15)), que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{1}{w-z}\,dw &= 1\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,,\\ &= 0\,, \quad \text{si } z \notin D(z_0; r]\,. \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit γ_n la concaténation de n copies de $\gamma_{z_0;r}$. Par le corollaire 1.3, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} \frac{1}{w-z}\,dw = n\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,.$$

Si $\tilde{\gamma}_n$ est la concaténation de n copies de $(\gamma_{z_0;r})_{\text{opp}}$ alors, par la proposition 1.20, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{w-z}\,dw = -n\,, \quad \text{si } z \in D(z_0; r[\,.$$

Autrement dit, pour γ l'un des chemins précédents et pour $z \notin C(z_0; r)$, la quantité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{1}{w-z}\,dw$$

est un entier (!) qui compte le nombre de tours que le chemin γ fait autour de z, le nombre étant strictement positif si γ tourne dans le sens trigonométrique positif, et strictement négatif si γ tourne dans le sens trigonométrique négatif.

Définition 4.3. *Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé d'image $\Gamma := \gamma([a; b])$ et $z \notin \Gamma$. On appelle indice de z par rapport à γ la quantité*

$$\operatorname{Ind}(\gamma; z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{dw}{w-z}\,.$$

Remarque 4.10. *Dans l'exemple 4.1, on a calculé l'indice de 0 par rapport au paramétrage du bord du triangle $T\left(1; e^{i2\pi/3}; e^{i4\pi/3}\right)$. On a trouvé que cet indice était égal à 1, ce qui correspond à l'intuition selon laquelle le chemin tourne une fois autour de 0 dans "le sens trigonométrique positif".*

Théorème 4.6. *Pour tout chemin fermé $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ d'image Γ et tout $z \notin \Gamma$, l'indice* $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ *est un nombre entier relatif.*

Démonstration. On commence par le cas où $\gamma : [a;a] \longrightarrow \mathbb{C}$. Par définition de l'intégrale sur γ (cf. définition 1.26), $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ est nul, pour tout $z \notin \Gamma$.
On suppose que γ est de classe C^1 (donc $a < b$). Pour $t \in [a;b]$, soit γ_t la restriction de γ à $[a;t]$. Soit $\varphi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}\,\mathrm{d}s\right).$$

En particulier, $\varphi(b) = \exp(2i\pi\mathrm{Ind}(\gamma; z))$. D'après les propriétés de l'exponentielle complexe, il suffit de montrer que $\varphi(b) = 1$ pour avoir le résultat cherché.
Comme l'exponentielle est holomorphe (cf. théorème 2.1), φ est C^1 et

$$\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\varphi(t), \tag{4.10}$$

(cf. proposition 1.25). Soit $\psi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\psi(t) = \varphi(t)/(\gamma(t) - z)$. La fonction ψ est aussi C^1 et, par (4.10),

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t) - z)^2} = 0. \tag{4.11}$$

Donc ψ est constante et $\psi(a) = \psi(b)$. Comme γ est fermé, $\gamma(b) = \gamma(a)$, ce qui donne $\varphi(b) = \varphi(a) = \exp(0) = 1$.
Passons au cas où γ est C^1 par morceaux (donc $a < b$). Soit $\gamma = \mathring{+}_{1\leq k\leq n}\gamma_k$ la concaténation issue de la proposition 1.17 avec $\gamma_k : [t_{k-1}; t_k] \longrightarrow \Gamma$. On considère les mêmes fonctions φ et ψ. Pour $1 \leq j \leq n$ et $t \in [t_{j-1}; t_j]$, on a, en posant $\tilde{\gamma}_j = \mathring{+}_{1\leq k\leq j-1}\gamma_k$, en notant par $(\gamma_j)_t$ la restriction de γ_j à $[t_{j-1}; t]$ et par γ_t celle de γ à $[a;t]$,

$$\int_{\gamma_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = \int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} + \int_{(\gamma_j)_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}$$

et, par le 3 du théorème 2.1,

$$\varphi(t) := \exp\left(\int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right) \exp\left(\int_{(\gamma_j)_t} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}\right).$$

Donc φ est C^1 sur $[t_{j-1}; t_j]$. En appliquant l'argument précédent sur $[t_{j-1}; t_j]$, on obtient $\psi(t_{j-1}) = \psi(t_j)$. Ceci étant vrai pour tout j, on a $\psi(a) = \psi(b)$. On termine la preuve comme dans l'argument précédent. □

Étant donné un chemin fermé γ d'image Γ, on s'intéresse à l'application $\mathrm{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à $z \notin \Gamma$, associe son indice $\mathrm{Ind}(\gamma; z)$ par rapport à γ. On rappelle que, comme γ est continu et défini sur un compact, Γ est un compact de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ est un ouvert non borné de $\mathbb{C}$. De plus, par le théorème 4.6, Ind_γ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Proposition 4.1. *Soit γ un chemin fermé d'image Γ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Alors l'application* $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est*

1. *continue sur* Ω*;*

2. *constante sur chaque chaque sous-ensemble connexe par arcs* $\tilde{\Omega}$ *de* Ω*;*

3. *nulle sur un sous-ensemble non borné et connexe par arcs* $\tilde{\Omega}$ *de* Ω*.*

4. *nulle sur* $\mathbb{C} \setminus D(0; R]$*, pour un certain* $R > 0$*.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $D(z_0; r_0[\subset \Omega$. Soit $r \in]0; r_0[$. La distance de $D(z_0; r]$ à Γ :

$$\rho \;:=\; \inf \left\{ |z - w| \,;\; z \in D(z_0; r] \,,\; w \in \Gamma \right\}$$

est strictement positive (cf. TD ou L2). Soit $(z; z') \in (D(z_0; r])^2$. D'après la proposition 1.19,

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z') = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z'} \right) \mathrm{d}w = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z - z'}{(w - z)\,(w - z')} \mathrm{d}w$$

donc, en utilisant la proposition 1.22, on obtient

$$\left| \mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z') \right| \le \frac{L(\gamma)\,|z - z'|}{2\pi} \sup_{w \in \Gamma} \frac{1}{|w - z|\,|w - z'|} \le \frac{L(\gamma)\,|z - z'|}{2\pi\rho^2} .$$

Cela montre que Ind_γ est $L(\gamma)/(2\pi\rho^2)$-lipschitzienne sur $D(z_0; r]$, donc continue en z_0. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, Ind_γ est continue sur Ω.
Soit $(z; z') \in \Omega^2$ tel qu'il existe une application continue $\sigma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ avec $\sigma(0) = z$ et $\sigma(1) = z'$. Comme Ind_γ est continue, il en est de même de $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$. Par le théorème 4.6, $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Si $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq \mathrm{Ind}_\gamma(z')$ alors il existe un réel non entier ℓ compris entre $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = (\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma)(0)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(z') = (\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma)(1)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$, $\mathrm{Ind}_\gamma \circ \sigma$ prend la valeur ℓ. Contradiction puisque la fonction est à valeurs entières. D'où $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z')$.
Soit $\tilde{\Omega}$ un sous-ensemble connexe par arcs de Ω. Pour tout $(z; z') \in \tilde{\Omega}^2$, il existe donc une application continue $\sigma : [0; 1] \longrightarrow \Omega$ avec $\sigma(0) = z$ et $\sigma(1) = z'$. Par l'argument précédent, $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(z')$. Donc Ind_γ est constante sur $\tilde{\Omega}$.
Soit $\tilde{\Omega}$ un sous-ensemble non borné et connexe par arcs de Ω. Comme Γ est compact, il existe $R > 0$ tel que $\Gamma \subset D(0; R]$. On note que l'ouvert $\mathbb{C} \setminus D(0; R]$ est connexe par arcs. Comme $\tilde{\Omega}$ est non borné, il existe $z \in \tilde{\Omega}$ tel que $|z| > R$. Donc $z \in \tilde{\Omega} \cap (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$ et l'ensemble $\tilde{\Omega} \cup (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$ est connexe par arcs. La fonction Ind_γ est donc constante sur cet ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \max(2R; L(\gamma)/\pi)$, on a, grâce à la proposition 1.22,

$$\left| \mathrm{Ind}_\gamma(n) \right| = \frac{1}{2n\pi} \left| \int_\gamma \frac{1}{\frac{w}{n} - 1} \mathrm{d}w \right| \le \frac{L(\gamma)}{n\pi} ,$$

puisque, pour tout $w \in \Gamma \subset D(0; R]$, $1 \le |(w/n) - 1| + |w/n| \le |(w/n) - 1| + (1/2)$ donc $|(w/n) - 1| \ge (1/2)$. Comme le majorant précédent est strictement inférieur à 1 et comme Ind_γ est à valeurs entières, $\mathrm{Ind}_\gamma(n) = 0$. Comme Ind_γ est constante sur $\tilde{\Omega} \cup (\mathbb{C} \setminus D(0; R])$, auquel n appartient, Ind_γ est nulle sur cet ensemble. Cela prouve 3 et 4. $\square$

Remarque 4.11. *En TD, on donne une méthode pratique de calcul de l'indice d'un point par rapport à un chemin.*

Remarque 4.12. *Étant donné un ouvert Ω, on peut montrer que Ω se décompose de façon unique comme une réunion disjointe de domaines, i.e. de sous-ensembles ouverts et connexes par arcs. Ces ensembles sont appelés les composantes connexes de Ω. Lorsque Ω est le complémentaire de l'image Γ d'un chemin, Ω contient le complémentaire d'un disque $D(0; R]$, qui est connexe par arcs, et on a exactement une de ces composantes connexes qui est non bornée. On peut alors reformuler la proposition 4.1 en disant que l'indice par rapport à γ est constant sur chaque composante connexe de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ et qu'il est nul sur la composante connexe non bornée.*

Remarque 4.13. *On sait plus de choses sur l'indice par rapport à un lacet γ. Il se trouve que le complémentaire de l'image de γ a une unique composante connexe non bornée (l'extérieur de γ) et une unique composante connexe bornée (l'intérieur de γ). Il se trouve que l'indice par rapport à γ est à valeurs dans $\{-1; 0; 1\}$. Sur la composante connexe non bornée, cet indice est nul (cf. proposition 4.1). Sur la composante connexe bornée, il est constant égal à 1 ou égal à -1. On peut définir l'orientation du lacet en fonction de cette dernière valeur (positive si cette valeur est 1, négative si cette valeur est -1).*
Tout ceci est particulièrement difficile à démontrer et fait partie d'un théorème de Jordan.

4.3 Formule de Cauchy générale.

Dans la proposition 3.4, on a montré, pour une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $D(z_0; r] \subset \Omega$, les formules (3.3) et (3.4) que l'on peut regrouper, en utilisant la notion d'indice, en la formule

$$\forall\, z \in \big(\Omega \setminus C(z_0; r)\big)\,, \quad \int_{\gamma_{z_0;r}} \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; 2i\pi\, f(z)\, \mathrm{Ind}\big(\gamma_{z_0;r}; z\big)\,,$$

où $\gamma_{z_0;r} : [0; 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ est un paramétrage du cercle $C(z_0; r)$ (cf. corollaire 2.4). D'après le théorème 4.4 et la proposition 3.1, une fonction holomorphe sur Ω y est analytique donc de classe C^1_h. La formule précédente s'applique donc à une fonction holomorphe. C'est la formule de Cauchy pour les cercles. Le résultat suivant montre que cette formule reste valable dans un ouvert étoilé si l'on remplace le paramétrage du cercle par un chemin fermé. Cette formule de Cauchy générale jouera un rôle important dans le chapitre suivant (cf. théorème 5.1).

Théorème 4.7 (Formule de Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, γ un chemin dont l'image Γ est incluse dans Ω et $z \in (\Omega \setminus \Gamma)$. On a alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;=\; f(z)\, \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,. \tag{4.12}$$

Démonstration. Pour $w \in \Gamma$, on écrit $f(w) = (f(w) - f(z)) + f(z)$ et on applique la proposition 1.19. On a donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \,+\, \int_\gamma \frac{f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \\ &=\; \int_\gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, \mathrm{d}w \,+\, 2i\pi\, f(z)\, \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f'(z)$ et, pour $w \neq z$, $g(w) = (f(w) - f(z))/(w - z)$. Par la proposition 1.25 et la définition 1.31, g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{z\}$ et continue en z. D'après le théorème 4.4, f est DSE en z : il existe $R > 0$ et une suite $(a_n)_n$ de complexes (suite dépendant de z) tels que

$$\forall\, w \in D(z; R[\,, \quad f(w) \;=\; f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(w \,-\, z)^n\,.$$

Pour $w \in D(z; R[\setminus\{z\}$, on a donc

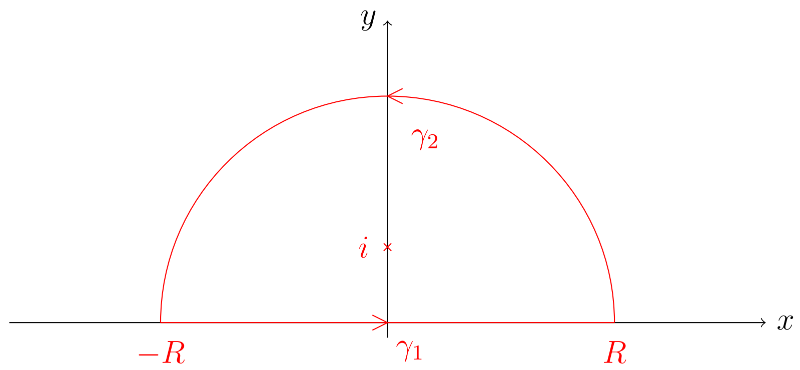
$$g(w) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(w \,-\, z)^{n-1}\,.$$

Comme les deux membres de cette égalité sont continus au point z, cette égalité est valable pour $w \in D(z; R[$. Par la proposition 2.7, g est holomorphe au point z. Donc g est holomorphe sur Ω et, comme Ω est étoilé, l'intégrale de g le long du chemin fermé γ est nulle, par le théorème 4.3. En reportant ce résultat dans (4.13), on obtient (4.12). $\square$

Application de la formule de Cauchy générale. On veut calculer

$$I \;:=\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Notons que la fonction $g(t) = \dfrac{\cos(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|g(t)| = O\left(1/t^2\right)$ en $+\infty$, donc I est bien définie.
On considère, pour tout $R > 0$, le chemin γ_R donné par la concaténation de $\gamma_1 : [0; 1] \ni t \mapsto Rt + (1-t)(-R)$ et de $\gamma_2 : [0; \pi] \ni t \mapsto Re^{it}$ (cf. proposition 1.17 et corollaire 2.4)



et on calcule

$$\int_{\gamma_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i; -i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{iz}}{1+z^2} \quad \text{et} \quad h(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+i}\,.$$

Elles sont holomorphes comme quotient de fonctions holomorphes. On a, en utilisant la partité de cosinus et l'imparité de sinus,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-R}^{R} \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^R \frac{\cos(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 2I\,,\end{aligned}$$

quand $R \to +\infty$. De plus, pour $R > 1$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\exp\left(iR\mathrm{e}^{it}\right)}{R^2\mathrm{e}^{i2t}+1} \times iR\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^{\pi} \frac{|\exp\left(-R\sin(t)+iR\cos(t)\right)|}{|R^2\mathrm{e}^{i2t}+1|} R\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{\exp\left(-R\sin(t)\right)}{R^2-1} R\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\pi R}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme h est holomorphe sur l'ouvert étoilé $\{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}(z) > -1\}$ et comme $f(z) = h(z)/(z-i)$, pour z appartenant à l'image de γ_R, on a, par la formule de Cauchy appliquée à h,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} \frac{h(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2i\pi\, h(i)\,\mathrm{Ind}(\gamma_R; i) = 2i\pi \frac{1}{2ie} 1 = \frac{\pi}{\mathrm{e}}\,.$$

Ainsi

$$\frac{\pi}{\mathrm{e}} = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow 2I$$

quand $R \to +\infty$. D'où $I = \pi/(2\mathrm{e})$.

4.4 Suites et séries de fonctions holomorphes.

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues définies sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ et qu'elle converge uniformément vers f alors f est continue (cf. proposition 1.14). Si on suppose, de plus, que les f_n sont holomorphes (avec Ω ouvert), on voudrait savoir si f est aussi holomorphe. Les résultats de L2 réclament une condition de convergence uniforme sur les différentielles de f_n pour conclure que f est différentiable. On va voir que l'holomorphie permet d'éviter cette condition supplémentaire. C'est une autre manifestation de la "rigidité" des fonctions holomorphes.

Théorème 4.8. *Soit Ω un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω. De plus, la suite $(f_n')_n$ des $\mathbb{C}$-dérivées converge vers la $\mathbb{C}$-dérivée f' de f, uniformément sur tout compact $K' \subset \Omega$.*

Remarque 4.14. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur Ω, qui converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Cela n'implique pas la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur Ω, comme on le montre dans l'exercice 2.1. On ne peut donc pas appliquer à cette suite la proposition 1.14 sur Ω. Malgré cela, f est continue sur Ω. Vérifions-le.*

Soit $z_0 \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $R > 0$ tel que $D(z_0; R[\subset \Omega$. Soit $r \in]0; R[$. La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur le compact $D(0; r]$, qui est inclus dans Ω, garantit, via la proposition 1.14, la continuité de f en z_0. Ceci étant vrai pour tout $z_0 \in \Omega$, f est continue sur Ω.

Démonstration du théorème 4.8. Tout d'abord, on sait, par la remarque 4.14, que f est continue sur Ω.
Soit T un triangle inclus dans Ω et γ le paramétrage de son bord (cf. définition 4.2). Comme T est compact, $(f_n)_n$ converge uniformément sur T donc aussi sur son bord ∂T, et, par la proposition 1.18, on a

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Pour tout n, f_n est holomorphe donc, par le théorème de Goursat (cf. théorème 4.2),

$$\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \quad \text{donc} \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Par le théorème de Morera (cf. théorème 4.5), f est holomorphe sur Ω.
Soit K' un compact inclus dans Ω. Comme $\mathbb{C} \setminus \Omega$ est un fermé disjoint de K', la distance

$$2\rho \;:=\; \inf\big\{|w \,-\, z|\,;\; w \in K'\,,\;\; z \in (\mathbb{C} \setminus \Omega)\big\}$$

est strictement positive, l'ensemble

$$K \;:=\; \big\{z \in \mathbb{C}\,;\; \exists\, w \in K'\,;\; |z - w| \,\leq\, \rho\big\}$$

est un compact disjoint de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ (cf. proposition 1.9). En particulier, pour tout $z \in K'$, $D(z; \rho] \subset K \subset \Omega$.
Pour tout n, on a, d'après les inégalités de Cauchy pour la $\mathbb{C}$-dérivée première (3.6) appliquée à la fonction holomorphe $f_n - f$ en un point $z \in K'$,

$$\big|f_n'(z) \,-\, f'(z)\big| \;\leq\; \frac{1!}{\rho} \sup_{w \in D(z;\rho]} |f_n(w) \,-\, f(w)| \;\leq\; \frac{1}{\rho} \sup_{w \in K} |f_n(w) \,-\, f(w)|$$

donc

$$\sup_{z \in K'} \big|f_n'(z) \,-\, f'(z)\big| \;\leq\; \frac{1}{\rho} \sup_{w \in K} |f_n(w) \,-\, f(w)|\,.$$

La convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur K implique donc celle de $(f_n')_n$ sur K'. □

Remarque 4.15. *Sous les hypothèses du théorème 4.8, on peut vérifier par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact $K \subset \Omega$.*

En appliquant le théorème 4.8 à la suite des sommes partielles, on obtient immédiatement la version suivante pour les séries de fonctions holomorphes.

Théorème 4.9. *Soit Ω un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$. Alors f est holomorphe sur Ω, la série $\sum f_n'$ converge vers f' sur tout compact $K \subset \Omega$ et*

$$\forall\, z \in \Omega\,, \quad f'(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)\,.$$

Exemple 4.2. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$f_n(z) \;=\; \frac{1}{n^z} \;=\; \mathrm{e}^{-z\ln(n)}\,.$$

Comme composée et produit de fonctions holomorphes, f_n *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$.
Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 1\}$ *et, pour* $\alpha > 1$, $F_\alpha := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) \geq \alpha\}$. *Pour* $z \in F_\alpha$,

$$|f_n(z)| \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z)\ln(n)} \;\leq\; \frac{1}{n^\alpha}$$

et, comme la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ *converge,* $\sum f_n$ *converge normalement, et donc uniformément, sur le fermé* F_α. *En particulier,* $\sum f_n$ *converge simplement sur* F_α *et, comme ceci est valable pour tout* $\alpha > 1$, $\sum f_n$ *converge simplement sur* Ω. *Sa somme* f *est donnée sur* Ω *par*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}\,.$$

Soit K *un compact inclu dans* Ω. *Comme* Re *est continue, elle atteint son minimum sur* K *en un* $z_0 \in K \subset \Omega$. *Pour* $\alpha = \mathrm{Re}(z_0) > 0$, *on a* $K \subset F_\alpha$. *Par la convergence normale précédente, on en déduit la convergence normale sur* K *de* $\sum f_n$ *donc la convergence uniforme sur* K *de* $\sum f_n$ *vers* f. *Par le théorème 4.9,* f *est donc holomorphe sur* Ω.
Cette fonction f *est appelée fonction zeta de Riemann et joue un rôle très important en mathématiques, en particulier en théorie des nombres.*

4.5 Fonctions holomorphes définies par une intégrale.

En L2, les intégrales sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et dépendant d'un paramètre ont été étudiées. Que se passe-t-il lorsque le paramêtre est complexe et que l'intégrande est holomorphe en ce paramètre ? On va voir que l'holomorphie de l'intégrale s'obtient sous des hypothèses moins restrictives que celles vues en L2 pour la dérivabilité partielle d'intégrales dépendant de paramètres réels.
On **admet** la conséquence suivante du théorème de convergence dominée de Lebesgue (cf. cours d'intégration).

Théorème 4.10. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$, *soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction. On suppose que,*

1. *pour tout* $z \in \Omega$, *la fonction* $I \ni t \mapsto f(t; z)$ *est continue par morceaux,*

2. *pour tout* $t \in I$, *la fonction* $\Omega \ni z \mapsto f(t; z)$ *est holomorphe,*

3. *pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe* $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *continue par morceaux telle que, pour tout* $(t; z) \in I \times K$, $|f(t; z)| \leq g(t)$ *et* $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge,*

Alors la fonction $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *donnée par*

$$F(z) \;=\; \int_I f(t; z)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et est holomorphe sur Ω. De plus, pour tout $z \in \Omega$,

$$F'(z) \;=\; \int_I \frac{\partial f}{\partial z}(t;z)\,\mathrm{d}t\,, \tag{4.14}$$

où $\partial/\partial z$ est l'opérateur différentiel $(\partial/\partial x \,-\, i\partial/\partial y)/2$ (cf. définition 1.33).

Remarque 4.16. *Pour celles et ceux qui suivent le cours de théorie de la mesure, et donc l'intégrale de Lebesgue, vous pouvez bien entendu remplacer, ci-dessus et dans la suite, les hypothèses "$I \ni t \mapsto f(t;z)$ est continue par morceaux" et "$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ coninue par morceaux" par "$I \ni t \mapsto f(t;z)$ est mesurable" et "g mesurable".*

Une application immédiate du théorème 4.10 donne une formule de Cauchy (cf. théorème 4.7) pour toutes les dérivées d'une fonction holomorphe.

Proposition 4.2 (Formule de Cauchy pour les dérivées.)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ ($a \leq b$) un chemin fermé et $z \in (\Omega \setminus \gamma([a;b]))$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \times \mathrm{Ind}(\gamma;z)\,. \tag{4.15}$$

Démonstration. Lorsque $a = b$, les deux membres de (4.15) sont nuls. On suppose désormais $a < b$.
On procède par récurrence sur l'ordre de dérivation n. Pour $n = 0$, (4.15) est vraie d'après le théorème 4.7. Supposons (4.15) vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. D'après la propostition 1.17, $\gamma = (\mathring{+})_{j=1}^n \gamma_j$, pour des chemins $\gamma_j : [aj;b_j] \longrightarrow \Omega$ de classe C^1. On a

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{j=1}^n \int_{a_j}^{b_j} \frac{f\big(\gamma_j(t)\big)}{(\gamma_j(t)\,-\,z)^{n+1}}\,\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Soit $j \in (\mathbb{N} \cap [1;n])$. On applique le théorème 4.10 à la fonction

$$f_j(t;z) \;=\; \frac{f\big(\gamma_j(t)\big)}{(\gamma_j(t)\,-\,z)^{n+1}}\,\gamma_j'(t)$$

sur l'ouvert $\Omega \setminus \gamma_j([a_j;b_j]))$ (en utilisant le fait que f est continue). La fonction

$$z \;\mapsto\; \int_{a_j}^{b_j} \frac{f\big(\gamma_j(t)\big)}{(\gamma_j(t)\,-\,z)^{n+1}}\,\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t$$

est donc holomorphe de $\mathbb{C}$-dérivée

$$z \;\mapsto\; (n+1)\int_{a_j}^{b_j} \frac{f\big(\gamma_j(t)\big)}{(\gamma_j(t)\,-\,z)^{n+2}}\,\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; (n+1)\int_{\gamma_j} \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+2}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Par somme, le membre de gauche de (4.15) est donc holomorphe sur $\Omega \setminus \gamma([a;b]))$ et, pour tout $z \in (\Omega \setminus \gamma([a;b]))$, sa $\mathbb{C}$-dérivée au point z est donnée par

$$\frac{(n+1)}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w\,-\,z)^{n+2}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme Ind_γ est constante près de z (cf. proposition 4.1), la $\mathbb{C}$-dérivée du membre de droite de (4.15) au point z est

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \times \mathrm{Ind}(\gamma; z) + 0 = \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!} \times \mathrm{Ind}(\gamma; z)\,,$$

ce qui donne (4.15) avec n remplacé par $n+1$. □

Exemple 4.3. *Soit* $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ *et* $I =]0, +\infty[$*. On considère la fonction définie sur* $I \times \Omega$ *par* $f(t,z) = t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}$ *où* $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln(t)}$*. On vérifie que, pour tout* z*, la fonction* $t \mapsto f(t,z)$ *est continue sur* I *et que, pour tout* $t > 0$*, la fonction* $z \mapsto f(t,z)$ *est holomorphe sur* Ω *(et même sur* $\mathbb{C}$ *tout entier). Pour* $0 < \alpha < \beta$*, pour tout* z *tel que* $\alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta$*,*

$$|f(t,z)| = \mathrm{e}^{(\mathrm{Re}(z)-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} \leq \begin{cases} \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ \mathrm{e}^{(\beta-1)\ln(t)}\mathrm{e}^{-t} = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1. \end{cases}$$

La fonction g *définie par* $g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t \leq 1, \\ t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t}, & si\ t > 1, \end{cases}$ *est continue par morceaux, positive et intégrable.*
En effet, en 0*, on a* $g(t) \sim t^{\alpha-1}$ *et comme* $\alpha - 1 > -1$ *l'intégrale*

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$$

converge. En $+\infty$*, on a* $g(t) = t^{\beta-1}\mathrm{e}^{-t} = t^{-2} \times t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = o(t^{-2})$ *puisque* $\lim_{t\to+\infty} t^{\beta+1}\mathrm{e}^{-t} = 0$ *(cf. croissances comparées), et l'intégrale*

$$\int_1^{+\infty} t^{-2}\,\mathrm{d}t$$

converge.
Par le théorème 4.10, la fonction Γ *donnée par*

$$\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et holomorphe sur tout ensemble $\{z \in \mathbb{C}\,;\ \alpha \leq \mathrm{Re}(z) \leq \beta\}$ *avec* $0 < \alpha < \beta$*. Elle est donc bien définie et holomorphe sur* Ω*. Cette fonction est appelée fonction Gamma.*

CHAPTER 5

FONCTIONS MÉROMORPHES.

Dans l'exemple 1.9, on a vu que, si P et $Q \neq 0$ sont des polynômes, alors P/Q est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Z(Q)$, où $Z(Q)$ est l'ensemble fini des zéros de Q. Dans ce chapitre, on va s'intéresser à des fonctions dites méromorphes, qui sont holomorphes en tout point d'un ouvert privé d'un ensemble discret et qui sont d'un certain type. La fraction P/Q est un exemple de fonction méromorphe.

5.1 Singularités isolées et développements de Laurent.

On introduit une classe de fonctions qui contient les fonctions méromorphes. On va utiliser la notion d'ensemble discret (cf. définition 1.5) et on a besoin d'une autre notion topologigue.

Définition 5.1. *Soit Ω un ouvert non vide et F une partie de Ω. On dit que F est fermée dans Ω (ou est un fermé de Ω) si $\overline{F} \cap \Omega = F$ ou, de manière équivalente, si $(\overline{F} \setminus F) \cap \Omega = \emptyset$.*

Proposition 5.1. *Soit Ω un ouvert non vide et F une partie de Ω.*

1. *Les propositions suivantes sont équivalentes : (F est fermé dans Ω), ($(\overline{F} \setminus F) \cap \Omega = \emptyset$), ($\Omega \setminus F$ est un ouvert) et (Pour toute suite d'éléments de F convergeant vers un élément de Ω, la limite est dans F).*

2. *Si F_1 et F_2 sont fermés dans Ω, $F_1 \cup F_2$ l'est aussi.*

3. *On suppose F discret et fermé dans Ω. Soit a un point d'accumulation de F. Alors $a \in (\overline{\Omega} \setminus \Omega)$.*

4. *Si F_1 et F_2 sont discrets et fermés dans Ω, $F_1 \cup F_2$ l'est aussi.*

5. *On suppose que Ω est un domaine et que F est discret et fermé dans Ω. Alors $\Omega \setminus F$ est un domaine.*

Démonstration. Voir TD. □

La classe de fonctions que l'on va étudier est la suivante.

Définition 5.2. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie dans Ω. On dit que f est* holomorphe à singularités isolées *sur Ω s'il existe un sous-ensemble discret $\mathcal{S}$ de Ω tel que $\mathcal{S}$ est fermé dans Ω et f est holomorphe sur l'ouvert $\Omega \setminus \mathcal{S}$.*
Dans ce cas, un élément de $\mathcal{S}$ est appelé singularité isolée *de f et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des singularités isolées de f.*

Exemple 5.1. *Quelques exemples importants.*

1. *Si P et $Q \neq 0$ sont des polynômes, alors P/Q est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, d'ensemble de singularités isolées $Z(Q) = Q^{-1}(\{0\})$, puisque $Z(Q)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.*

2. *Soit Ω un domaine, $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et g non nulle. Par le principe des zéros isolés (cf. théorème 3.1), $Z(g)$ est un ensemble vide ou discret. Si $Z(g)$ est vide, c'est un fermé de Ω. Si $Z(g)$ est non vide, il est aussi fermé dans Ω : si $(z_n)_n \in Z(g)^{\mathbb{N}}$ converge vers un $\ell \in \Omega$ alors, par continuité de g en ℓ, on a $g(\ell) = \lim_n g(z_n) = 0$ donc $\ell \in Z(g)$. Par la proposition 5.1, $Z(g)$ est fermé dans Ω.*
   Par la proposition 1.25, f/g est holomorphe sur $\Omega \setminus Z(g)$ donc f/g est holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $Z(g)$.

3. *Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = \exp(1/z)$. Par la proposition 1.25 et le théorème 2.1, f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ donc f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, d'ensemble de singularités isolées $\{0\}$.*

Bien sûr, dans les exemples précédents, le cas 1 est un cas particulier du cas 2. Plaçons-nous dans le cas 2. Soit $s \in Z(g)$. D'après la preuve du théorème 3.1, il existe $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $\tilde{g} : D(s; R[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et ne s'annulant pas, tels que

$$\forall\, z \in D(s; R[\,, \quad g(z) \;=\; (z \,-\, s)^n\, \tilde{g}(z)\,.$$

Comme $f/\tilde{g}$ est holomorphe sur $D(s; R[$, elle est DSE en s donc il existe $r \in]0; R]$ et une suite $(a_p)_p \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall\, z \in D(s; r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f}{g}(z) \;=\; (z \,-\, s)^{-n} \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,(z \,-\, s)^p \;=\; \sum_{q=-n}^{\infty} a_{n+q}\,(z \,-\, s)^q\,.$$

Dans le cas 3 de l'exemple 5.1, on a une situation similaire puisque

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*\,, \quad f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{z^n} \;=\; \sum_{q=-\infty}^{0} \frac{z^q}{(|q|)!}\,.$$

Soit f holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s \in \mathcal{S}$. À la lumière des exemples précédents, on s'attend à ce que, sur un certain disque épointé $D(s; r[\setminus\{s\}$, f soit la somme d'une série de fonctions du type

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n\,(z \,-\, s)^n\,,$$

dans un sens à préciser.

Définition 5.3. *Soit $s \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On appelle série de Laurent en s toute série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ telle que $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,*

a). $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-s)^n$ est une série entière de rayon de convergence $\geq R$ et

b). $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{-n}(z-s)^n$ est une série entière de rayon de convergence $\geq 1/r$,

avec la convention $1/r = +\infty$ si $r = 0$.

Proposition 5.2. *Dans le cadre de la définition 5.3, on considère la couronne (ou l'anneau) $A(s;r;R) = \{z \in \mathbb{C}\,; r < |z-s| < R\}$. Soit g la somme sur $D(0;R[$ de la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et soit h la somme sur $D(0;1/r[$ (avec la convention $D(0;1/r[= \mathbb{C}$ si $r = 0$) de la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n} z^n$.*
Alors, pour tout compact K inclus dans $D(s;R[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ converge normalement sur K et, pour tout compact K inclus dans $A(s;r;+\infty)$, la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ converge normalement sur K.
En particulier, pour tout compact K inclus dans l'anneau $A(s;r;R)$, les deux séries précédentes convergent normalement sur K.
Sur $D(s;R[$, la somme de la série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ est $D(s;R[\ni z \mapsto g(z-s)$. Sur $A(s;r;+\infty)$, la somme de la série $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ est $A(s;r;+\infty) \ni z \mapsto h(1/(z-s))$.
La fonction $f : A(s;r;R) \longrightarrow \mathbb{C}$, définie par

$$f(z) \;=\; g(z-s) + h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\,,$$

est holomorphe. C'est la somme de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ en s et on note

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\,(z-s)^n\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a, pour tout $\rho \in]r;R[$,

$$a_n \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{f(w)}{(w-s)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\,, \tag{5.1}$$

où $\gamma_{s;\rho}$ est le chemin fermé C^1 $[0;2\pi] \ni t \mapsto s+\rho e^{it}$ d'image $C(s;\rho)$ (cf corollaire 2.4).
Enfin, on a la formule de Cauchy suivante : pour tout $r < \rho_1 < \rho_2 < R$,

$$\forall\, z \in A(s;\rho_1;\rho_2)\,,\quad f(z) \;=\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;-\; \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,. \tag{5.2}$$

Démonstration. La convergence normale de $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ sur tout compact de $D(s;R[$ est assurée par le corollaire 2.1. Soit K inclus dans $A(s;r;+\infty)$ et

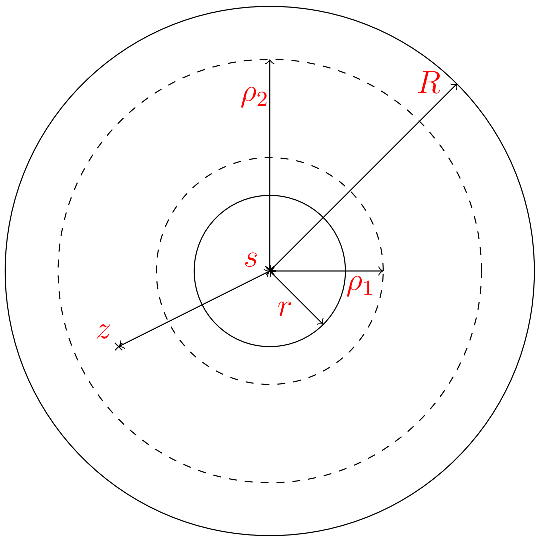
$$K' \;:=\; \big\{(z-s)^{-1}\,;\; z \in K\big\} \;\subset\; D(0;1/r[\,.$$

K' est un compact comme image d'un compact par une application continue. La convergence normale sur K de $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ est équivalente à celle de $\sum_{n\geq 1} a_{-n}w^n$ sur K' et cette dernière est garantie par le corollaire 2.1.
Par inversion, compostion et somme, la fonction f est holomorphe sur $A(s;r;R)$ (cf. proposition 1.25).

Soit $\rho \in]r; R[$. Comme $C(s;\rho)$ est un compact inclus dans $A(s;r;R)$, les séries $\sum_{n\geq 0} a_n(z-s)^n$ et $\sum_{n\geq 1} a_{-n}(z-s)^{-n}$ convergent normalement sur $C(s;\rho)$ donc, d'après la proposition 1.18, on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{f(w)}{(w-s)^{p+1}}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{\gamma_{s;\rho}} (w-s)^{n-p-1}\,\mathrm{d}w = 2i\pi\, a_p\,,$$

car le chemin $\gamma_{s;\rho}$ est fermé et, pour tout $n \neq p$, les fonctions $\mathbb{C}\setminus\{s\} \ni w \mapsto (w-s)^{n-p-1}$ admettent une primitive et d'après (2.14). On a montré (5.1).
Soit $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ et $z \in A(s;\rho_1;\rho_2)$ (voir dessin ci-dessous).



Par la formule de Cauchy appliquée à $g(\cdot - s)$ sur l'ouvert étoilé $D(s;R[$ (cf. théorème 4.7), on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{g(w-s)}{w-z}\,\mathrm{d}w = g(z-s)\,\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_2};z) = g(z-s)$$

car $z \in D(s;\rho_2[$, et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{g(w-s)}{w-z}\,\mathrm{d}w = g(z-s)\,\mathrm{Ind}(\gamma_{s;\rho_1};z) = 0$$

car $z \notin D(s;\rho_1]$.
Soit $\rho \in \{\rho_1;\rho_2\}$. Pour $w \in C(s;\rho)$, on a

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-s+s-z} = \frac{1}{s-z}\,\frac{1}{w-s}\,\frac{1}{\frac{1}{w-s}-\frac{1}{z-s}}\,.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{s;\rho}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= -\frac{1}{z-s}\int_{\gamma_{s;\rho}} \frac{1}{w-s}\,h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\frac{1}{\frac{1}{w-s}-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{-i}{z-s}\int_0^{2\pi} h\big(e^{-it}/\rho\big)\frac{1}{\frac{e^{-it}}{\rho}-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{z-s}\int_0^{2\pi}\big(h(w')/w'\big)_{|w'=e^{-it}/\rho}\frac{1}{\frac{e^{-it}}{\rho}-\frac{1}{z-s}}\frac{-ie^{-it}}{\rho}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{z-s}\int_\gamma \frac{h(w)}{w}\frac{1}{w-\frac{1}{z-s}}\,\mathrm{d}w\,,
\end{aligned}$$

où $\gamma = (\gamma_{s;1/\rho})_{\mathrm{inv}}$, dont l'image est $C(0;1/\rho)$.
Sur $D(0;1/r[\setminus\{0\}$, on a

$$\frac{h(w)}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n}\,w^{n-1}$$

et le rayon de convergence de la derniŕe série entière est $\geq 1/r$ (cf. corollaire 2.1). Donc $D(0;1/r[\setminus\{0\}\ni w\mapsto h(w)/w$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0;1/r[$, qui est étoilé. Par la formule de Cauchy appliquée à ce prolongement (cf. théorème 4.7), on obtient

$$\int_{\gamma_{s;\rho}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{2i\pi}{z-s}\mathrm{Ind}\big(\gamma;1/(z-s)\big)\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)(z-s)\,.$$

Comme $\rho_1<|z-s|<\rho_2$, $1/\rho_2<1/(z-s)<1/\rho_1$. Pour $\rho=\rho_1$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma;1/(z-s))=-1$ donc

$$\int_{\gamma_{s;\rho_1}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = -2i\pi\,h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)$$

et, pour $\rho=\rho_2$, on a $\mathrm{Ind}(\gamma;1/(z-s))=0$ donc

$$\int_{\gamma_{s;\rho_2}} h\Big(\frac{1}{w-s}\Big)\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0\,.$$

En regroupant ces calculs d'intégrale, on obtient (5.2). □

Pour une fonction f holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$ et $s\in\mathcal{S}$, on vérifie maintenant que f est "DSL en s", c'est-à-dire que f est la somme d'une série de Laurent sur un certain $D(s;R[\setminus\{s\}$.

Proposition 5.3. *Soit f une fonction holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$, et $s\in\mathcal{S}$. Il existe $R>0$ tel que, pour tous $0<\rho_1<\rho_2<R$, on a la formule de Cauchy (5.2). La fonction f est la somme, sur $D(s;R[\setminus\{s\}$, de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ en s dont les coefficients sont donnés par (5.1), pour tout $\rho\in]0;R[$. En particulier, par la proposition 5.2, f ne peut être la somme d'une autre série de Laurent. On appelle la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ le* DSL *de f en s.*

Démonstration. Comme $\mathcal{S}$ est discret, il existe un $R>0$ tel que $D(s;R[\cap\mathcal{S}=\{s\}$. Soit $0<\rho_1<\rho_2<R$ et $z\in A(s;\rho_1;\rho_2)$. On note par $d(z)$ la différence à droite de l'égalité dans (5.2). Par la proposition 2.9, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}}\frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z) \quad\text{et}\quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}}\frac{f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0\,.$$

Donc, par la proposition 1.19, on a

$$d(z) - f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w\,. \tag{5.3}$$

Soit $g : D(s;R[\longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(z) := f'(z)$ et, pour $w \neq z$,

$$g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,.$$

D'après la preuve du théorème 4.7, g est holomorphe. Comme $D(s;R[$ est étoilé et les chemins $\gamma_{s;\rho_1}$ et $\gamma_{s;\rho_2}$ sont fermés, on a, par le théorème 4.3,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} g(w)\,\mathrm{d}w = 0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} g(w)\,\mathrm{d}w\,.$$

En reportant dans (5.3), on obtient $d(z) = f(z)$, c'est-à-dire (5.2).
En écrivant, pour $w \in C(s;\rho_2)$, $w - z = w - s + s - z$, on a

$$\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w - s}\,\frac{1}{1 - \frac{z-s}{w-s}}\,\mathrm{d}w\,.$$

Comme, pour $w \in C(s;\rho_2)$, $|(z-s)/(w-s)| \leq |z-s|/\rho_2 < 1$, on a la convergence normale sur $C(s;\rho_2)$ de la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(z-s)^n/(w-s)^n$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{w - s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - s)^n}{(w - s)^n}\,\mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z - s)^n\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_2}} \frac{f(w)}{(w - s)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z - s)^n
\end{aligned} \tag{5.4}$$

en définissant a_n, pour $n \geq 0$, par (5.1). En particulier, la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$ converge pour $|w| < \rho_1$. Par le corollaire 2.1, son rayon de convergence est $\geq \rho_2$, pour tout $0 < \rho_2 < R$, donc est $\geq R$. On note par g sa somme sur $D(0;R[$.
Par ailleurs, on a, en utilisant la convergence normale sur $C(s;\rho_1)$ de la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(w-s)^n/(z-s)^n$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{s - z}\,\frac{1}{1 - \frac{w-s}{z-s}}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{s - z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w - s)^n}{(z - s)^n}\,\mathrm{d}w \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(z - s)^{-n-1}\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_{s;\rho_1}} \frac{f(w)}{(w - s)^{-n-1+1}}\,\mathrm{d}w \\
&= -\sum_{p=1}^{\infty}(z - s)^{-p}\,a_{-p}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

où les a_{-p}, pour $p \geq 1$, sont donnés par (5.1). En particulier, la série entière $\sum_{p\geq 1} a_{-p} w^p$ converge pour tout $1/|w| > \rho_1$ donc pour tout $|w| < 1/\rho_1$. Par le corollaire 2.1, son rayon de convergence est $\geq 1/\rho_1$, pour tout $0 < \rho_1$, donc est infini. On note par h sa somme sur $\mathbb{C}$. Pour $z \in D(s; R[\setminus\{s\}$, on a donc, d'après (5.2), (5.4) et (5.5),

$$f(z) \;=\; g(z\,-\,s)\,+\,h\Big(\frac{1}{z\,-\,s}\Big)$$

donc la fonction f est bien la somme de la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-s)^n$ sur $A(s; 0; R) = D(s; R[\setminus\{s\}$. □

5.2 Théorème des résidus.

On établit ici un résultat très utile pour calculer des intégrales (cf. paragraphe 5.6).

Définition 5.4. *Dans le cadre de la proposition 5.3, pour chaque $s \in \mathcal{S}$, le coefficient a_{-1} (i.e. $h'(0)$) est appelé résidu de f en s, noté* $\mathrm{Res}(f; s)$.

Théorème 5.1. *[Théorème des résidus.] Soit Ω un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. On considère $\gamma : [a; b] \longrightarrow \Omega \setminus \mathcal{S}$ un chemin fermé. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Res}(f; s)\,\mathrm{Ind}(\gamma; s)\,, \tag{5.6}$$

la somme étant finie car l'ensemble $\{s \in \mathcal{S}\,;\ \mathrm{Ind}(\gamma; s) \neq 0\}$ l'est.

Remarque 5.1. *Comme dans la partie 4.1, on peut remplacer l'hypothèse* ouvert étoilé *par l'hypothèse* ouvert simplement connexe, *voir la remarque 4.9. On ne peut cependant pas se passer d'une hypothèse sur Ω.*
Dans le cas où, pour un $z_0 \in \Omega$, f est donnée par $f(z) = g(z)/(z-z_0)$ avec g holomorphe sur Ω, la formule (5.6) redonne la formule de Cauchy (4.12) pour g. En effet, $\mathcal{S} = \{z_0\}$ et le DSL *de f en z_0 est $\sum_{p\geq -1} a_p (z - z_0)^p$ avec $a_{-1} = g(z_0)$ et, pour $p \geq 0$, $a_p = g^{p-1}(z_0)/((p-1)!)$ (puisque g est* DSE *en z_0, cf. théorème 4.4), donc le résidu de f en z_0 est $g(z_0)$.*

Démonstration. On commence par le

Lemme 5.1. *Il existe un ouvert étoilé borné $\tilde{\Omega}$ tel que $\tilde{\Omega} \cap \mathcal{S}$ est un ensemble fini et*

$$\gamma\big([a; b]\big)\ \subset\ \tilde{\Omega}\ \subset\ \overline{\tilde{\Omega}}\ \subset\ \Omega\,.$$

Démonstration. Voir TD. □

Soit $\tilde{\Omega}$ satisfaisant les conditions du lemme 5.1. On remplace f par sa restriction à $\tilde{\Omega}$, que l'on note encore par f, et son ensemble de singularités isolées est $\tilde{\Omega} \cap \mathcal{S} = \{s_j\, 1 \leq j \leq p\}$ avec, pour $1 \leq j \neq k \leq p$, $s_j \neq s_k$. Par la proposition 5.3, pour tout $1 \leq j \leq p$, il existe $R_j > 0$ tel que f est DSL en s_j sur $D(s_j; R_j[\setminus\{s_j\}$:

$$f(z) \;=\; g_j(z\,-\,s_j)\,+\,h_j\Big(\frac{1}{z\,-\,s_j}\Big)\,,$$

où $\mathbb{C}\setminus\{s_j\} \ni h_j(1/(z-s_j))$ est holomorphe et g_j est holomorphe sur $D(s_j;R_j[$. On considère $g:\tilde{\Omega}\setminus\mathcal{S}\longrightarrow\mathbb{C}$ donnée par

$$g(z) \;=\; f(z) - \sum_{j=1}^{p} h_j\Big(\frac{1}{z-s_j}\Big)\,.$$

Par la proposition 1.25, g est holomorphe. Pour $1\le j\le p$ et $z\in D(s_j;R_j[\setminus\{s_j\}$, on a $g(z)=g_j(z-s_j)$ et, comme g_j est DSE en 0 sur $D(0;R_j[$, g se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(0;R_j[$. Donc g admet un prolongement holomorphe, encore noté par g, à $\tilde{\Omega}$. Comme $\tilde{\Omega}$ est étoilé, g admet une primitive sur $\tilde{\Omega}$ (cf. théorème 4.3) et, comme γ est un chemin fermé, on a

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \bigg(f(w) - \sum_{j=1}^{p} h_j\Big(\frac{1}{w-s_j}\Big)\bigg)\,\mathrm{d}w \\ &=\; \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;-\; \sum_{j=1}^{p}\int_\gamma h_j\Big(\frac{1}{w-s_j}\Big)\,\mathrm{d}w\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

par la proposition 1.19. Pour $1\le j\le p$, on a, en utilisant encore une convergence normale, pour des coefficients complexes $a_{-k}^{(j)}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_\gamma h_j\Big(\frac{1}{w-s_j}\Big)\,\mathrm{d}w \;&=\; \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{(j)}\,(w-s_j)^{-k}\,\mathrm{d}w \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}^{(j)}\int_\gamma (w-s_j)^{-k}\,\mathrm{d}w \\ &=\; a_{-1}^{(j)}\,2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma;s_j) \;=\; 2i\pi\,\mathrm{Res}(f;s_j)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s_j) \end{aligned}$$

puisque, pour $k\neq 1$, $\mathbb{C}\setminus\{s_j\}\ni w\mapsto (w-s_j)^{-k}$ admet une primitive et γ est fermé (cf. proposition 1.26). En reportant dans (5.7), on obtient

$$\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 2i\pi \sum_{s\in(\tilde{\Omega}\cap\mathcal{S})} \mathrm{Res}(f;s)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s)\,. \tag{5.8}$$

Soit $s\in(\mathcal{S}\setminus\tilde{\Omega})$. Donc $s\in(\mathbb{C}\setminus\tilde{\Omega})$. Comme $\mathbb{C}\setminus\tilde{\Omega}$ est le complémentaire de l'ensemble borné $\tilde{\Omega}$, il est non borné et connexe par arcs. Comme $\gamma([a;b])\subset\tilde{\Omega}$, $\mathbb{C}\setminus\tilde{\Omega}$ est inclus dans $\mathbb{C}\setminus\gamma([a;b])$. Par la proposition 4.1, Ind_γ est nulle sur $\mathbb{C}\setminus\tilde{\Omega}$ et $\mathrm{Ind}(\gamma;s)=0$. Donc

$$\sum_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Res}(f;s)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s) \;=\; \sum_{s\in(\tilde{\Omega}\cap\mathcal{S})} \mathrm{Res}(f;s)\,\mathrm{Ind}(\gamma;s)$$

ce qui, avec (5.8), donne (5.6). □

5.3 Classification des singularités.

Pour une fonction holomorphe à singularités isolées, on distingue différents types de singularité.

Définition 5.5. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une holomorphe à singularités isolées sur Ω, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s\in\mathcal{S}$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-s)^n$ le* DSL *de f en s.*

1. *Si, pour tout* $n < 0$*,* $a_n = 0$ *(i.e.* $h = 0$*), on dit que* s *est une singularité artificielle (ou rétractable) de* f*.*

2. *Si l'ensemble* $\mathcal{C}_s := \{n \in \mathbb{N}^* \, ; \; a_{-n} \neq 0\}$ *est non vide et fini, on dit que* s *est un pôle de* f *d'ordre* n_0*, où* $n_0 = \max \mathcal{C}_s$ *(i.e.* h *est un polynôme de degré* n_0*).*

3. *Si l'ensemble* $\mathcal{C}_s$ *est infini, on dit que* s *est une singularité essentielle de* f*.*

4. *On dit que* f *est méromorphe sur* Ω *si elle n'a pas de singularité essentielle.*

On peut repérer le type d'une singularité sans connaître le DSL en cette singularité, comme le montre le

Théorème 5.2. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*,* f *une holomorphe à singularités isolées sur* Ω*, d'ensemble de singularités isolées* $\mathcal{S}$ *et* $s \in \mathcal{S}$*.*

1. *Soit* $\mathcal{I}_s := \{n \in \mathbb{N}; \; \lim_{z \to s}(z - s)^n f(z)$ *existe*$\}$*. Alors* $\mathcal{I}_s$ *est vide ou bien il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathcal{I}_s = [n_0; +\infty[\cap \mathbb{N}$*.*

2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   P_1*.* s *est une singularité artificielle de* f*.*

   P_2*. Il existe un* $r > 0$ *tel que la restriction de* f *à* $D(s; r[\setminus \{s\}$ *se prolonge en une application holomorphe sur* $D(s; r[$*.*

   P_3*.* $\lim_s f$ *existe dans* $\mathbb{C}$*.*

   P_4*.* $\lim_s |f|$ *existe dans* $\mathbb{R}^+$*.*

   P_5*. Il existe* $r > 0$ *tel que la restriction de* f *à* $D(s; r] \setminus \{s\}$ *est bornée.*

3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

   Q_1*.* s *est un pôle de* f*.*

   Q_2*.* $\lim_s f$ *n'existe pas dans* $\mathbb{C}$ *et il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lim_{z \to s}(z - s)^n f(z)$ *existe.*

   Q_3*.* $\lim_s f$ *n'existe pas dans* $\mathbb{C}$ *et il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $r > 0$ *tels que* s *est une singularité artificielle de* $D(s; r[\setminus \{s\} \ni z \mapsto (z - s)^n f(z)$*.*

   Q_4*.* $\lim_s |f|$ *existe et vaut* $+\infty$*.*

4. s *est une singularité essentielle de* f *si et seulement si* $\lim_s |f|$ *n'existe pas.*

5. *Si* s *est une singularité artificielle de* f *alors* $\mathcal{I}_s = \mathbb{N}$*. Si* s *est un pôle de* f *alors son ordre est le minimum de* $\mathcal{I}_s$*. Si* s *est une singularité essentielle de* f *alors* $\mathcal{I}_s$ *est vide.*

6. *Soit* $z_0 \in \Omega$ *tel* z_0 *ne soit pas une singularité essentielle de* f*. Alors il existe* $r > 0$*,* $p \in \mathbb{Z}$ *et une fonction holomorphe* $g : D(z_0; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ *ne s'annulant pas tels que*

$$\forall \, z \in D(z_0; r[\setminus \{z_0\} \, , \quad f(z) \; = \; (z \, - \, z_0)^p \, g(z) \, . \tag{5.9}$$

Démonstration. Supposons $n \in \mathcal{I}_s$. Pour $p > n$, on a, sur un $D(s;r[\backslash\{s\}$, $(z-s)^p f(z) = (z-s)^{p-n}(z-s)^n f(z)$, qui tend vers 0, quand $z \to s$. Donc $p \in \mathcal{I}_s$ et $[n;+\infty[\cap\mathbb{N} \subset \mathcal{I}_s$. En posant $n_0 = \min \mathcal{I}_s$, on a donc $\mathcal{I}_s = [n_0;+\infty[\cap\mathbb{N}$.

$P_1 \implies P_2$: Par hypothèse, il existe $r > 0$ telle que $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$ sur $D(s;r[\backslash\{s\}$ avec g holomorphe sur $D(0;r[$ et h nulle. Donc f se prolonge en la fonction holomorphe $D(s;r[\ni z \mapsto g(z-s)$.

$P_2 \implies P_3$: Le prolongement g de f sur $D(s;r[$ est holomorphe donc continu en s. Donc $\lim_s f = g(s)$.

$P_3 \implies P_4$: Comme $\lim_s f$ existe et le module est continu et positif, $\lim_s |f|$ existe dans $\mathbb{R}^+$.

$P_4 \implies P_5$: Par hypothèse, il existe $r > 0$ tel que, sur $D(s;r[\backslash\{s\}$, $|f| < 1 + \lim_s |f|$. La restriction de f à $D(s;r[\backslash\{s\}$ est donc bornée.

$P_5 \implies P_1$: Il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in D(s;R[\backslash\{s\}$, $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$. Comme g est holomorphe sur $D(0;R[$, elle y est continue. D'après l'hypothèse, il existe $r \in]0;R[$ tel que f est bornée sur $D(s;r] \setminus \{s\}$ et, comme $r < R$, $g(\cdot - s)$ est bornée sur $D(s;r] \setminus \{s\}$. Donc $D(s;r] \setminus \{s\} \ni z \mapsto h(1/(z-s))$ est aussi bornée. Comme la fonction $1/(\cdot - s)$ envoie $D(s;r] \setminus \{s\}$ sur $\mathbb{C} \setminus D(0;1/r[$, h est bornée sur $\mathbb{C} \setminus D(0;1/r[$. Comme h est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est continue donc bornée sur $D(0;1/r]$. Donc h est bornée. Par le théorème de Liouville (cf. théorème 3.4), h est constante et, comme $h(0) = 0$, h est nulle. Donc s est une singularité artificielle de f.

D'après l'équivalence $P_1 \iff P_2$, on a l'équivalence $Q_2 \iff Q_3$.

$Q_1 \implies Q_2$: D'après $P_1 \iff P_3$, $\lim_s f$ n'existe pas. Il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in D(s;R[\backslash\{s\}$, $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$. D'après l'hypothèse, h est un polynôme non nul

$$h(w) = \sum_{k=0}^{n} b_k w^k$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est le degré de h. Pour $z \in D(s;R[\backslash\{s\}$, on a donc

$$(z-s)^n f(z) = (z-s)^n g(z-s) + \sum_{k=0}^{n} b_k (z-s)^{n-k}$$

qui tend vers b_n, quand $z \to s$.

$Q_2 \implies Q_4$: D'après $Q_2 \iff Q_3$ et $P_1 \iff P_2$, il existe $r > 0$ tel que la fonction $D(s;r[\backslash\{z\} \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe F sur $D(s;r[$. Quitte à réduire r, on peut supposer que le DSE $\sum_{p\geq 0} a_p (z-s)^p$ de F en s converge sur $D(s;r[$. On a donc, pour $z \in D(s;r[\backslash\{z\}$,

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-s)^n} = \sum_{q=-n}^{+\infty} a_{q+n} (z-s)^q$$

et c'est le DSL de f en s (par unicité de ce dernier). Si les a_{q+n}, pour $q < 0$, étaient tous nuls alors f aurait une limite en s. Cela contredit l'hypothèse. Soit $q_0 < 0$ le plus petit indice q tel que $a_{q+n} \neq 0$. On a donc, pour $z \in D(s;r[\backslash\{z\}$,

$$f(z) = (z-s)^{q_0} \sum_{q=q_0}^{+\infty} a_{q+n} (z-s)^{q-q_0} ,$$

où la somme précédente tend vers $a_{q_0} \neq 0$, quand $z \to s$. Donc $\lim_s |f| = +\infty$ car $a_{q_0} \neq 0$ et $\lim_{z\to s} |z-s|^{q_0} = +\infty$.
$Q_4 \Longrightarrow Q_1$: Il existe $R > 0$ tel que, pour $z \in D(s;R[\setminus\{s\}$, $f(z) = g(z-s) + h(1/(z-s))$. Comme g est holomorphe sur $D(0;R[$, $\lim_s g(\cdot - s) = g(0)$. Pour $z \in D(s;R[\setminus\{s\}$,

$$\left|h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\right| \;\geq\; |f(z)| - |g(z-s)| \;\to\; +\infty$$

quand $z \to s$, et, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{z\to s}\left|h\Big(\frac{1}{z-s}\Big)\right| \;=\; +\infty\,.$$

Comme $\lim_{|w|\to+\infty} s + 1/w = s$, on en déduit que, par composition de limites, on en déduit que $\lim_{|w|\to+\infty} |h(w)| = +\infty$. Par le théorème 3.7, on en déduit que h est une fonction polynôme. Donc s est un pôle de f.
D'après les équivalences $P_1 \Longleftrightarrow P_4$ et $Q_1 \Longleftrightarrow Q_4$, on a l'équivalence du point 3.
Si s est une singularité artificielle de f alors $0 \in \mathcal{I}_s$ par P_3 donc, par 1, $\mathcal{I}_s = \mathbb{N}$.
Soit s un pôle de f. Alors $\mathcal{I}_s \neq \emptyset$ et $0 \notin \mathcal{I}_s$, par Q_2. Soit $n_1 = \min \mathcal{I}_s$ et $n_0 > 0$ l'ordre de s. D'après la preuve de $Q_1 \Longrightarrow Q_2$, $n_0 \in \mathcal{I}_s$ donc, par 1, $n_0 \geq n_1$. Toujours par la preuve de $Q_1 \Longrightarrow Q_2$, on a, pour $z \in D(s;r[\setminus\{z\}$,

$$(z-s)^{n_1} f(z) \;=\; (z-s)^{n_1} g(z-s) + \sum_{k=0}^{n_1} b_k\,(z-s)^{n_1-k} + (z-s)^{n_1-n_0} \sum_{k=n_1}^{n_0} b_k\,(z-s)^{n_0-k}\,.$$

Les trois premiers termes ont une limite quand $z \to s$ donc le dernier aussi. Comme la dernière somme tend vers $b_{n_0} \neq 0$, $z \mapsto (z-s)^{n_1-n_0}$ est bornée donc $n_1 = n_0$.
Soit s une singularité essentielle de f. Supposons qu'on ait un $n \in \mathcal{I}_s$. Si $n = 0$ alors, d'après $P_1 \Longleftrightarrow P_3$, s est une singularité artificielle. Contradiction. Si $n > 0$ et $0 \notin \mathcal{I}_s$ alors, d'après $Q_1 \Longleftrightarrow Q_2$, s est un pôle de f. Contradiction. Donc $\mathcal{I}_s$ est vide.
Soit $z_0 \in \Omega \setminus \mathcal{S}$. Si $f(z_0) \neq 0$, f ne s'annule pas sur un petit disque $D(z_0;r[\subset (\Omega\setminus\mathcal{S})$, par continuité, donc on a la propriété souhaitée avec $p = 0$, $g = f$. Si z_0 est un zéro d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de f, soit $R > 0$ tel que $D(z_0.R[\subset (\Omega\setminus\mathcal{S})$. Alors on a la propriété souhaitée avec $p = n$ d'après la preuve du théorème des zéros isolés appliquée à la restriction de f au disque $D(z_0.R[$ (cf. théorème 3.1).
Soit $z_0 \in \mathcal{S}$ une singularité artificielle de f. D'après 2, f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde f$ sur un $D(z_0;r[$ et on est ramené au cas précédent avec f remplacée par $\tilde f$.
Soit $z_0 \in \mathcal{S}$ un pôle de f d'ordre n. D'après 3, z_0 est une singularité artificielle d'une fonction $\tilde f : D(z_0;r[\longrightarrow \mathbb{C}$, pour un $r > 0$, donnée par $\tilde f(z) = (z-z_0)^n f(z)$. D'après le cas précédent, il existe $r_0 \in]0;r]$, $p_0 \in \mathbb{N}$ et $g : D(z_0;r_0[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(z_0;r_0[\setminus\{z_0\}\,,\quad (z-z_0)^n f(z) \;=\; (z-z_0)^{p_0} g(z)\,,$$

ce qui donne la propriété souhaitée pour $p = p_0 - n$. □

Exemple 5.2. *Quelques exemples.*

1. *Soit* $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *donnée par* $f(z) = \sin(z)/z$. *Comme* sin *est* $\mathbb{C}$*-dérivable en* 0 *de nombre* $\mathbb{C}$*-dérivé* 1, $\lim_0 f$ *existe et vaut* 1. *Par le théorème 5.2,* 0 *est une singularité artificielle de* f.

2. *Soit* $g : \mathbb{C} \setminus \{0;1;2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *la fonction holomorphe donnée par*

$$g(z) = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{z(z^3 - 4z^2 + 5z - 2)} = \frac{z^3 - 3z^2 + 3z - 2}{z(z-1)^2(z-2)}.$$

On utilise le théorème 5.2*. On voit que* $\lim_0 g$ *et* $\lim_1 g$ *n'existent pas donc* 0 *et* 1 *ne sont pas des singularités artificielles de* g*. En revanche, on remarque que* $z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = (z-2)(z^2 - z + 1)$*, donc* $\lim_2 g$ *existe et vaut* $3/2$*. Donc* 2 *est une singularité artificielle de* g*. En particulier, le résidu de* g *en* 2 *est nul. Comme* $\lim_{z\to 0} zg(z)$ *existe et* $\lim_0 g$ *n'existe pas,* 0 *est un pôle d'ordre* 1 *de* g*. Comme* $\lim_{z\to 2} g(z)$ *n'existe pas,* $\lim_{z\to 2}(z-2)g(z)$ *n'existe pas et* $\lim_{z\to 2}(z-2)^2 g(z)$ *existe,* 2 *est un pôle d'ordre* 2 *de* g*. Puisque* g *n'a pas de singularité essentielle,* g *est une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$*. On déterminera plus loin les résidus de* g *en* 0 *et* 1*.*

3. *Soit* $h : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *donnée par* $h(z) = \exp(1/z)$*. Par composition, elle est holomorphe. Par définition de l'exponentielle, on a, pour tout* $z \in \mathbb{C}^*$*,*

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

Par unicité, il s'agit du DSL *de* h *en* 0*. Comme le coefficient de chaque puissance négative est non nul,* 0 *est une singularité essentielle de* h *(cf. définition* 5.5*). Par le théorème* 5.2*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, les fonctions* $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^n h(z)$ *n'ont pas de limite en* 0 *et* $|h|$ *n'a pas de limite en* 0*. De plus, pour tout* $r > 0$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$*, la restriction de* $\mathbb{C}^* \ni z \mapsto z^n h(z)$ *à* $D(0;r] \setminus \{0\}$ *n'est pas bornée. Grâce au développement précédent, le résidu de* h *en* 0 *est* $1/(1!) = 1$*.*

4. *On reprend le 2 de l'exemple* 5.1*. Soit* $s \in Z(g)$ *et* n *l'ordre de* s *comme zéro de* g*. D'après la preuve du théorème* 3.1*,*

$$\lim_{z\to s} (z-s)^n \frac{f(z)}{g(z)}$$

existe donc, par le théorème 5.2*,* s *est soit une singularité artificielle soit un pôle de* f/g*. Donc* f/g *est une fonction méromorphe.*

5.4 Opérations.

Dans cette partie, on vérifie que l'ensemble des fonctions holomorphes à singularités isolées sur un ouvert est stable par certaines opérations.
Par commodité, on introduit la

Définition 5.6. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*. L'ensemble des fonctions holomorphes à singularités isolées sur* Ω *est noté* $\mathcal{H}_{si}(\Omega)$*.*

Proposition 5.4. *Soit* Ω *un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$*. Soit* $f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$*,* $f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors* $f_1 + f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$*,* $f_1 f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$*,* $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ *et* $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) l'ensemble des singularités isolées de f_1 (resp. f_2). Comme λf_1 et f_1' sont holomorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{S}_1$ (cf. proposition 1.25, théorème 4.4 et définition 3.2), $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$. Soit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. D'après la proposition 5.1, $\mathcal{S}$ est discret et fermé dans Ω. Par la proposition 1.25, $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont holomorphes sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Donc $f_1 + f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1 f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$. $\square$

Proposition 5.5. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit $f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, la fonction f_2 étant non nulle. Soit $\mathcal{S}_1$ (resp. $\mathcal{S}_2$) l'ensemble des singularités isolées de f_1 (resp. f_2). Soit $Z(f_1)$ l'ensemble des zéros de f_1 et $Z := Z(f_2)$ l'ensemble des zéros de f_2.*

1. *L'ensemble Z des zéros de f_2 est un ensemble discret et fermé dans $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$.*
2. *Si $s \in ((\overline{Z} \setminus Z) \cap \Omega)$ alors s est une singularité essentielle de f_2.*
3. *$f_1/f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et son ensemble de singularités isolées est $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z$.*
4. *Soit s une singularité essentielle de f_1. Alors, si s n'est pas une singularité essentielle de f_2, s est aussi une singularité essentielle de f_1/f_2.*
5. *Soit s une singularité essentielle de f_2. Alors, si s n'est pas une singularité essentielle de f_1, s est aussi une singularité essentielle de f_1/f_2.*

Démonstration. Par hypothèse, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont discrets et fermés dans Ω donc $\overline{\mathcal{S}_1} \cap \Omega = \mathcal{S}_1$ et $\overline{\mathcal{S}_2} \cap \Omega = \mathcal{S}_2$. Par la proposition 5.1, $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$ est un domaine.

1. Comme f_2 est holomorphe sur le domaine $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$, Z est un ensemble discret, par le théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1). Soit $(z_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers un $z \in (\Omega \setminus \mathcal{S}_2)$. Comme f_2 est continue en z, $f_2(z) = \lim f_2(z_n) = 0$ donc $z \in Z$. Donc Z est fermé dans $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$, par la proposition 5.1.

2. Par hypothèse, il existe une suite $(z_n)_n \in Z^{\mathbb{N}}$ tendant vers s. Comme on suppose que $s \notin Z$, $s \notin (\Omega \setminus \mathcal{S}_2)$, par le 1. Or $s \in \Omega$ par hypothèse, donc $s \in \mathcal{S}_2$.
   Supposons que s soit un pôle de f_2. Par le théorème 5.2, $\lim_s |f_2| = +\infty$. Donc, par composition de limites, $+\infty = \lim |f_2(z_n)|$. Contradiction puisque la suite $(f_2(z_n))_n$ est nulle.
   Supposons que s soit une singularité artificielle de f_2. Par le théorème 5.2, il existe $r > 0$ tel que la restriction de f_2 à $D(s;r[\setminus\{s\}$ se prolonge en une fonction holomorphe g sur $D(s;r[$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $z_n \in D(s;r[\setminus\{s\}$. Pour $n \geq N$, $g(z_n) = f_2(z_n) = 0$ et, comme g est continue en s, $g(s) = \lim f_2(z_n) = 0$. Le point s est donc un point d'accumulation de $Z(g)$. Par le théorème des zéros isolés sur le domaine $D(s;r[$ (cf. théorème 3.1), g est nulle. Donc f_2 est nulle sur $D(s;r[\setminus\{s\}$. Comme $\Omega \setminus \mathcal{S}_2$ est un domaine, le théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1) impose que f_2 soit nulle. Contradiction avec l'hypothèse sur f_2.
   Conclusion : s est forcément une singularité essentielle de f_2.

3. Le quotient $f_1(z)/f_2(z)$ n'est définie que si $z \in \Omega$ et $z \notin (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z)$. De plus, par la proposition 1.25, f_1/f_2 est holomorphe sur $\Omega \setminus (\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z)$.
   Par la proposition 5.1 et le point 1, l'ensemble $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup Z$ est discret et fermé dans Ω. On a montré que $f_1/f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$.

4. Comme s n'est pas une singularité essentielle de f_2, il existe, d'après le 6 du théorème 5.2, $r_2 > 0$, $p_2 \in \mathbb{Z}$ et $g_2 : D(s; r_2[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que
$$\forall\, z \in D(s; r_2[\setminus\{s\}\,, \quad f_2(z) \;=\; (z \,-\, z_0)^{p_2}\, g_2(z)\,.$$
Supposons que s n'est pas une singularité essentielle de f_1/f_2. Alors, par le 6 du théorème 5.2, il existe $r \in]0; r_2]$, $p \in \mathbb{Z}$ et $g : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe ne s'annulant pas tels que
$$\forall\, z \in D(s; r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f_1}{f_2}(z) \;=\; (z \,-\, z_0)^{p}\, g(z)\,.$$
Donc, sur $D(s; r[\setminus\{s\}$, $f_1(z) = (z-s)^{p+p_2} g(z) g_2(z)$ et, comme $\lim_s g g_2 = g(s) g_2(s) \neq 0$, $\lim_s |f_1|$ existe. D'après le 4 du théorème 5.2, cela contredit l'hypothèse selon laquelle s est une singularité essentielle de f_1. Donc s est bien une singularité essentielle de f_1/f_2.

5. Supposons que s n'est pas une singularité essentielle de f_1/f_2. Comme au 4, il existe $r > 0$, $(p; p_1) \in \mathbb{Z}^2$, $g, g_1 : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et ne s'annulant pas tels que
$$\forall\, z \in D(s; r[\setminus\{s\}\,, \quad \frac{f_1}{f_2}(z) \;=\; (z \,-\, z_0)^{p}\, g(z) \quad \text{et} \quad f_1(z) \;=\; (z \,-\, z_0)^{p_1}\, g_1(z)\,.$$
Donc, sur $D(s; r[\setminus\{s\}$, $f_2(z) = (z-s)^{p_1 - p} g_1(z)/g(z)$ et, comme $\lim_s g_1/g = g_1(s)/g(s) \neq 0$, $\lim_s |f_2|$ existe. D'après le 4 du théorème 5.2, cela contredit l'hypothèse selon laquelle s est une singularité essentielle de f_2. Donc s est bien une singularité essentielle de f_1/f_2. $\square$

Remarque 5.2. *La situation du 2 de cette proposition 5.5 se produit dans l'exemple suivant. Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \cos(1/z)$ et $\Omega = \mathbb{C}$. Par composition, f est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. Donc $f \in \mathcal{H}_{si}(\mathbb{C})$. On vérifie (cf. TD) que*
$$Z(f) \;=\; \left\{ \frac{1}{\pi/2 \,+\, n\pi}\,;\; n \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Le point 0 est point d'accumulation de $Z(f)$, puisque la suite $(1/(\pi/2 + n\pi))_n$ tend vers 0, et $0 \notin Z(f)$, puisque $Z(f) \subset \mathbb{C}^*$. Donc $0 \in ((\overline{Z(f)} \setminus Z(f)) \cap \Omega)$.
Le 2 de la proposition 5.5 montre que 0 est une singularité essentielle de f ce que l'on peut retrouver en utilisant le DSE *de cosinus sur* $\mathbb{C}$.

5.5 Fonctions méromorphes.

Parmi les fonctions holomorphes à singularités isolées, on se concentre ici sur les fonctions méromorphes qui ont été définies dans la définition 5.5.

Définition 5.7. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est noté $\mathcal{M}(\Omega)$.*

Proposition 5.6. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Soit $f_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f_1 f_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\lambda f_1 \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{M}(\Omega)$.*

Démonstration. Par la preuve de la proposition 5.4, $f_1+f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $f_1f_2 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, $\lambda f_1 \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ et $f_1' \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_1$, respectivement.
Soit $s \in \mathcal{S}_1$. Comme s n'est pas une singularité essentielle de f_1, puisque f_1 est méromorphe, $\lim_s |f_1|$ existe (cf. le 4 du théorème 5.2) donc $\lim_s |\lambda f_1|$ existe.
Soit $s \in \mathcal{S}$. Comme f_1 et f_2 sont méromorphes, s n'est ni une singularité essentielle pour f_1 ni pour f_2. Par le 6 du théorème 5.2, il existe $r > 0$, $(p_1;p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et des fonctions holomorphes $g_1, g_2 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(s;r[\backslash\{s\}\,, \quad f_1(z) \;=\; (z-s)^{p_1}\, g_1(z) \quad \text{et} \quad f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_2}\, g_2(z)\,. \tag{5.10}$$

Donc $\lim_s |f_1 f_2|$ existe.
Sur $D(s;r[\backslash\{s\}$, on peut écrire, si $p_1 > p_2$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_1}\left(g_1(z) + (z-s)^{p_2-p_1}\, g_2(z)\right)$$

et, si $p_1 < p_2$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^{p_2}\left((z-s)^{p_1-p_2}\, g_1(z) + g_2(z)\right).$$

Lorsque $p_1 = p_2 = p$, on peut écrire sur $D(s;r[\backslash\{s\}$, d'après la preuve du théorème des zéros isolés pour $g_1 + g_2$ sur le domaine $D(s;r[$ si $g_1(s) + g_2(s) = 0$,

$$f_1(z) + f_2(z) \;=\; (z-s)^{p}\,(z-s)^{n}\, g(z)$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et g holomorphe ne s'annulant pas en s. Dans tous les cas, $\lim_s |f_1 + f_2|$ existe.
Soit $s \in \mathcal{S}_1$. D'après (5.10), on a, sur $D(s;r[\backslash\{s\}$,

$$f_1'(z) \;=\; p_1\,(z-s)^{p_1-1}\, g_1(z) + (z-s)^{p_1}\, g_1'(z) \;=\; (z-s)^{p_1-1}\left(p_1 g_1(z) + (z-s)\, g_1'(z)\right)$$

donc $\lim_s |f_1'|$ existe.
Par le 4 du théorème 5.2, $s \in \mathcal{S}_1$ n'est pas une singularité essentielle de f_1' ni de λf_1 et $s \in \mathcal{S}$ n'est pas une singularité essentielle de $f_1 + f_2$ ni de $f_1 f_2$. Les fonctions f_1', λf_1, $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ sont donc méromorphes. □

Que peut-on dire d'un quotient de fonctions méromorphes ?

Proposition 5.7. *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, la fonction g étant non nulle. Soit $\mathcal{P}_f$ (resp. $\mathcal{P}_g$) l'ensemble des pôles de f (resp. g).*

1. *$f/g \in \mathcal{M}(\Omega)$.*
2. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \backslash (Z(g) \cup \mathcal{P}_g))$ et si n_f est l'ordre de s comme pôle de f, alors s est un pôle de f/g d'ordre n_f.*
3. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \cap \mathcal{P}_g)$, n_f est l'ordre de s comme pôle de f, n_g est l'ordre de s comme pôle de g, alors, si $n_f > n_g$, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f - n_g$ et, si $n_f \leq n_g$, s est une singularité artificielle de f/g.*
4. *Si $s \in (\mathcal{P}_f \cap Z(g))$, n_f est l'ordre de s comme pôle de f, N_g est l'ordre de s comme zéro de g, alors s est un pôle de f/g d'ordre $n_f + N_g$.*

5. *Si* $s \in (Z(g) \setminus (Z(f) \cup \mathcal{P}_f))$ *et si* N_g *est l'ordre de* s *comme zéro de* g*, alors* s *est un pôle de* f/g *d'ordre* N_g*.*
6. *Si* $s \in (Z(g) \cap Z(f))$*,* N_g *est l'ordre de* s *comme zéro de* g*,* N_f *est l'ordre de* s *comme zéro de* f*, alors, si* $N_f \geq N_g$*,* s *est une singularité artificielle de* f/g *et, si* $N_f < N_g$*,* s *est un pôle de* f/g *d'ordre* $N_g - N_f$*.*

Démonstration. On note par $\mathcal{S}_f$ (resp. $\mathcal{S}_g$) l'ensemble des singularités isolées de f (resp. g). Par le 3 de la proposition 5.5, $f/g \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g \cup Z(g)$. Soit $z_0 \in \Omega$. Comme f et g sont méromorphes, il existe, d'après le 6 du théorème 5.2, $r > 0$, $(p;q) \in \mathbb{Z}^2$ et $f_1, g_1 : D(z_0;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes ne s'annulant pas tels que

$$\forall\, z \in D(z_0;r[\setminus\{z_0\}\,, \quad f(z) = (z-z_0)^p f_1(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z-z_0)^q g_1(z)\,. \tag{5.11}$$

1. Il reste à vérifier que f/g n'a pas de singularité essentielle. Soit $z_0 \in (\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g \cup Z(g))$. D'après (5.11), $\lim_{z_0} |f/g|$ existe donc, par le 4 du théorème 5.2, z_0 n'est pas une singularité essentielle de f/g.
2. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.2, on a (5.11) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = 0$. On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n < n_f$, $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas tandis que $\lim_{z\to s}(z-s)^{n_f}(f/g)(z)$ existe. Par les points 3 et 5 du théorème 5.2, s est un pôle de f/g d'ordre n_f.
3. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.2, on a (5.11) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = -n_g < 0$. On en déduit que, si $n_f \leq n_g$, $\lim_s(f/g)$ existe donc, par le 2 du théorème 5.2, s est une singulartité artificielle de f/g. On déduit de (5.11) que, si $n_f > n_g$, $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < n_f - n_g$ et existe pour $n = n_f - n_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.2, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f - n_g$.
4. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.2, on a (5.11) avec $z_0 = s$, $p = -n_f < 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < n_f + N_g$ et existe pour $n = n_f + N_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.2, s est un pôle de f/g d'ordre $n_f + N_g$.
5. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.2, on a (5.11) avec $z_0 = s$, $p = 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < N_g$ et existe pour $n = N_g$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.2, s est un pôle de f/g d'ordre N_g.
6. Par hypothèse et la preuve du 6 du théorème 5.2, on a (5.11) avec $z_0 = s$, $p = N_f > 0$ et $q = N_g > 0$. On en déduit que, si $N_f \geq N_g$, $\lim_s(f/g)$ existe donc, par le 2 du théorème 5.2, s est une singulartité artificielle de f/g. On déduit de (5.11) que, si $N_f < N_g$, $\lim_{z\to s}(z-s)^n(f/g)(z)$ n'existe pas pour $n < N_g - N_f$ et existe pour $n = N_g - N_f$. Par les points 3 et 5 du théorème 5.2, s est un pôle de f/g d'ordre $N_g - N_f$. □

Dans le 4 de l'exemple 5.2, on a vu qu'un quotient de fonctions holomorphes sur un domaine Ω est une fonction méromorphe. On va maintenant montrer que, “localement”, une fonction méromorphe est un quotient de fonctions holomorphes.

Théorème 5.3. *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction définie dans Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La fonction f est méromorphe sur Ω.*
2. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et, pour tout $z \in \Omega$, il existe $r > 0$ et deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : D(z; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tels que f_2 est non nulle, $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(z; r[\setminus \{z\}$.*
3. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et tel que, pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $r > 0$ et deux fonctions holomorphes $f_1, f_2 : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ tels que f_2 est non nulle, $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(s; r[\setminus \{s\}$.*
4. *Il existe un ensemble $\mathcal{S}$, discret et fermé dans Ω, tel que f est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{S}$ et tel que, pour tout $s \in \mathcal{S}$, il existe $r > 0$, $p \in \mathbb{Z}$ et une fonction holomorphe $g : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que, sur $D(s; r[\setminus \{s\}$, $f(z) = (z - s)^p g(z)$.*

Démonstration. On procède par implications successives.
$1 \Longrightarrow 2$: Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de singularités isolées de f. On sait que $\mathcal{S}$ est discret et fermé dans Ω et que $\Omega \setminus \mathcal{S}$ est ouvert. Soit $z \in \Omega$.
Cas où $z \in \Omega \setminus \mathcal{S}$: Il existe $r > 0$ tel que $D(z; r[\subset \Omega \setminus \mathcal{S}$ et $f = f_1/f_2$ sur $D(z; r[$, pour $f_1 = f$ et f_2 constante égale à 1. On a $Z(f_2) = \emptyset$ donc $Z(f_1) \cap Z(f_2) = \emptyset$.
Cas où $z = s \in \mathcal{S}$ et s est un pôle de f : Par la preuve du 6 du théorème 5.2, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ avec $p < 0$ et il existe une fonction holomorphe $g : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que (5.9) soit vraie. On a le résultat souhaité pour $f_1 = g$ ne s'annulant pas et f_2 donnée par $f_2(z) = (z - s)^{-p}$.
Cas où $z = s \in \mathcal{S}$ et s est une singularité artificielle de f : Par la preuve du 6 du théorème 5.2, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe une fonction holomorphe $g : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que (5.9) soit vraie. On a le résultat souhaité pour f_1 donnée par $f_1(z) = (z - s)^p$ et $f_2 = 1/g$ ne s'annulant pas.
$2 \Longrightarrow 3$: C'est clair.
$3 \Longrightarrow 4$: On prend l'ensemble $\mathcal{S}$ de l'hypothèse. Soit $s \in \mathcal{S}$.
Cas où $f_2(s) \neq 0$: Par continuité de f_2, il existe $r' \in]0; r]$ tel que f_2 ne s'annule pas sur $D(s; r'[$. Par la preuve du 6 du théorème 5.2, il existe $r > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et il existe une fonction holomorphe $g_1 : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que, sur $D(s; r[$, $f_1(z) = (z - s)^p g_1(z)$. On a le résultat souhaité avec $g = g_1/f_2$ ne s'annulant pas.
Cas où $f_2(s) = 0$: Soit $n > 0$ l'ordre de s comme zéro de f_2. Par la preuve du théorème des zéros isolés (cf. théorème 3.1), il existe $r > 0$ et une fonction holomorphe $g_2 : D(s; r[\longrightarrow \mathbb{C}$ ne s'annulant pas tels que, sur $D(s; r[$, $f_2(z) = (z - s)^n g_2(z)$. Par hypothèse, $f_1(s) \neq 0$ donc, par continuité de f_1, il existe $r' \in]0; r]$ tel que f_1 ne s'annule pas sur $D(s; r'[$. On a donc le résultat souhaité sur $D(s; r'[\setminus \{s\}$ avec $g = f_1/g_2$ et $p = -n$.
$4 \Longrightarrow 1$: Par hypothèse, $f \in \mathcal{H}_{si}(\Omega)$ d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$. Soit $s \in \mathcal{S}$. D'après la factorisation de f, $\lim_s |f|$ existe donc, par le 4 du théorème 5.2, s n'est pas une singularité essentielle de f. Donc f est bien méromorphe (cf. définition 5.5). □

On termine ce paragraphe en donnant des méthodes de calcul de résidu pour les fonctions méromorphes.

Proposition 5.8. *Soit Ω un ouvert, f méromorphe sur Ω et s une singularité isolée (donc non essentielle) de f.*

1. *Si s est un pôle simple de f alors* $\mathrm{Res}(f;s) = \lim_{z\to s}(z-s)f(z)$.

2. *Si s est un pôle d'ordre $n \geq 1$ de f alors il existe $r > 0$ tel que $(D(s;r[\setminus\{s\}) \ni z \mapsto (z-s)^n f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $D(s;r[$ et*

$$\mathrm{Res}(f;s) \;=\; \lim_{s} \frac{\tilde{f}^{(n-1)}}{(n-1)!} \;=\; \frac{\tilde{f}^{(n-1)}(s)}{(n-1)!}\,.$$

3. *S'il existe $r > 0$ tel que la restriction de f à $D(s;r[\setminus\{s\}$ soit f_1/f_2, où $f_1, f_2 : D(s;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes et s est un zéro d'ordre 1 de f_2. Alors* $\mathrm{Res}(f;s) = f_1(s)/f_2'(s)$.

Démonstration. Par la proposition 5.3, le DSL de f en s est de la forme, pour un $r > 0$ et un $n \geq 1$,

$$\forall\, z \in D(s;r[\setminus\{s\})\,, \quad f(z) \;=\; g(z\,-\,s) \,+\, \sum_{k=1}^{n} a_{-k}\,(z\,-\,s)^{-k} \tag{5.12}$$

et $a_{-1} = \mathrm{Res}(f;s)$.

1. Il s'agit d'un cas particulier du 2, le cas $n = 1$.

2. On a (5.12) pour l'ordre n du pôle s. Donc, pour tout $z \in D(s;r[\setminus\{s\}$, on a

$$(z\,-\,s)^n\,f(z) \;=\; (z\,-\,s)^n\,g(z\,-\,s) \,+\, \sum_{k=1}^{n} a_{-k}\,(z\,-\,s)^{n-k}$$

qui se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}$ sur $D(s;r[$. De plus

$$\begin{aligned}\forall\, z \in D(s;r[\,, \quad \tilde{f}(z) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,(z\,-\,s)^{n+k} \,+\, \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell-n}\,(z\,-\,s)^{\ell}\\ &=\; \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell-n}\,(z\,-\,s)^{\ell} \,+\, \sum_{\ell=n}^{\infty} \frac{g^{(\ell-n)}(0)}{k!}\,(z\,-\,s)^{\ell}\,.\end{aligned}$$

Par unicité du DSE de $\tilde{f}$ en s et par (3.1), on a

$$\frac{\tilde{f}^{(n-1)}(s)}{(n-1)!} \;=\; a_{-1} \;=\; \mathrm{Res}(f;s)\,.$$

3. Par le théorème 4.4, f_2 sont DSE en s donc il existe $r_0 \in]0;r]$ tel que, en utilisant le fait que s est un zéro simple de f_2, pour tout $z \in D(s;r_0[$,

$$f_2(z) \;=\; 0 \,+\, f_2'(s)(z\,-\,s) \,+\, (z\,-\,s)\,g_2(z)$$

avec $f_2'(s) \neq 0$ et $g_2(s) = 0$. Par continuité de g_2 en s, il existe $r_1 \in]0;r_0]$ tel que, pour $z \in D(s;r_1[$, $|g_2(z)| \leq |f_2'(s)|/2$. Donc la fonction holomorphe $D(s;r_1[\ni z \mapsto f_2'(s) + g_2(z)$ ne s'annule pas. Par la proposition 1.25, son inverse $\tilde{g}$ est holomorphe sur $D(s;r_1[$ et $f_1\tilde{g}$ l'est aussi. Par le théorème 4.4, $f_1\tilde{g}$ est DSE en s donc il existe $r_2 \in]0;r_1]$ tel que, pour tout $z \in D(s;r_2[$,

$$\frac{f_1}{f_2}(z) = \frac{1}{z-s}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(f_1\tilde{g})^{(k)}(s)}{k!}(z-s)^k = \sum_{p=-1}^{+\infty}\frac{(f_1\tilde{g})^{(p+1)}(s)}{(p+1)!}(z-s)^p\,.$$

Par unicité, il s'agit du DSL de f_1/f_2 en s et le résidu de f_1/f_2 en s est le coefficient de $(z-s)^{-1}$ c'est-à-dire $(f_1\tilde{g})(s) = f_1(s)/f_2'(s)$. □

Remarque 5.3. *On revient sur des fonctions considérées dans l'exemple 5.2.*
La fonction f a une singularité artificielle en 0 donc elle admet un prolongement holomorphe sur un disque ouvert centré en 0 (cf. théorème 5.2). Par la proposition 5.3, son résidu en 0 est nul. De même, le résidu de la fonction g en 2 est nul, puisque 2 est une singularité artificielle de g.
Comme g admet un pôle simple en 0, on a, d'après la proposition 5.8,

$$\mathrm{Res}(g;0) = \lim_{z\to 0} z\,g(z) = 1\,.$$

Comme g admet un pôle double en 1, on sait, par la proposition 5.8, qu'il existe un $r>0$ tel que $D(1;r[\setminus\{1\} \ni z \mapsto (z-1)^2 g(z)$ se prolonge en une application holomorphe $\tilde{g} : D(1;r[\longrightarrow \mathbb{C}$ et que le résidu de g en 1 est $\tilde{g}'(1)$. Pour $|z-1|<r$, on a

$$\tilde{g}(z) = \frac{z^3-3z^2+3z-2}{z\,(z-2)}$$

donc

$$\tilde{g}'(z) = \frac{(3z^2-6z+3)\,z(z-2) - \big(z^3-3z^2+3z-2\big)\,(z-2+z)}{z^2\,(z-2)^2}\,.$$

On a donc $\mathrm{Res}(g;1) = \tilde{g}'(1) = 0$.
Sur le DSL *en 0 de la fonction h , on lit que son résidu en 0 est $1/(1!) = 1$.*

5.6 Applications du théorème des résidus.

Commençons par une application directe du théorème des résidus (cf. théorème 5.1). On veut calculer

$$I := \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{2z}}{z\sin(z)}\,\mathrm{d}z\,,$$

où $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donné par $\gamma(t) = 4e^{it}$. Les fonctions $g : \mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(2z)$ et $h : \mathbb{C} \ni z \mapsto z\sin(z)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. D'après le 2 de l'exemple 5.1 sur le domaine $\mathbb{C}$, le quotient f de g par h est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$. L'ensemble des singularités isolées est $\pi\mathbb{Z}$ (l'ensemble des zéros de h), qui est disjoint de l'image de γ. Comme $\mathbb{C}$ est étoilé, on peut appliquer à f le théorème des résidus (cf. théorème 5.1), ce qui donne (5.6). Comme prévu par ce théorème, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $\pi\mathbb{Z}$ dont l'indice par rapport à γ est non nul. En l'occurence, il y en a 3, tous d'indice 1, à savoir $-\pi$, 0 et π. Donc

$$I = 2i\pi\big(\mathrm{Res}(f;-\pi) + \mathrm{Res}(f;0) + \mathrm{Res}(f;\pi)\big)\,.$$

Il reste à déterminer ces résidus.
On a $h'(z) = \sin(z) + z\cos(z)$ donc $h'(-\pi) = -\pi\cos(-\pi) = \pi = -\pi\cos(pi) = -h'(\pi)$. Donc, comme l'exponentielle ne s'annule pas, $-\pi$ et π sont des pôles simples de f (cf. proposition 5.7). Par le 1 de la proposition 5.8,

$$\mathrm{Res}(f;-\pi) \;=\; \frac{g(-\pi)}{h'(-\pi)} \;=\; \frac{e^{-2\pi}}{\pi} \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(f;\pi) \;=\; \frac{g(\pi)}{h'(\pi)} \;=\; -\,\frac{e^{2\pi}}{\pi}\,.$$

Comme $h''(z) = 2\cos(z) - z\sin(z)$, $h(0) = h'(0) = 0 \neq h''(0)$. Donc 0 est un zéro double de h et, comme l'exponentielle ne s'annule pas, c'est un pôle double de f (cf. proposition 5.7). On utilise le 2 de la proposition 5.8 pour déterminer le résidu. Pour $z \neq 0$, on a $z^2 f(z) = z\exp(2z)/\sin(z)$, qui se prolonge en une fonction entière $\tilde{f}$. Pour $z \neq 0$, on a, d'après la définition 2.4,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(z) \;&=\; \frac{\big(\exp(2z) \,+\, 2z\exp(2z)\big)\,\sin(z) \;-\; z\exp(2z)\cos(z)}{\sin^2(z)} \\
&= \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\,\big((1+2z)\,\sin(z) \;-\; z\,\cos(z)\big) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \;+\; \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;-\; z\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \;+\; \frac{\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \;-\; z\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right) \\
&= 2\exp(2z)\,\frac{z}{\sin(z)} \;+\; \frac{z^2\exp(2z)}{\sin^2(z)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(-2n)\,z^{2n-1}\,.
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{z\to 0}\sin(z)/z = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$, on voit que $\lim_0 \tilde{f} = 2 - 0 = 2$. Par le 2 de la proposition 5.8, $\mathrm{Res}(f;0) = 2$. On en déduit que

$$I \;=\; 2i\pi\left(\frac{e^{-2\pi}}{\pi} \,+\, 2 \,-\, \frac{e^{2\pi}}{\pi}\right) \;=\; 4i\pi \;-\; 4i\,\mathrm{sh}(2\pi)\,.$$

Le théorème des résidus (cf. théorème 5.1) est très utile pour déterminer la valeur d'intégrales usuelles. On a déjá calculé une telle intégrale dans le paragraphe 4.3 en utilisant la formule de Cauchy générale, qui est un cas particulier du théorème des résidus (cf. remarque 5.1). On donne ici deux autres exemples.

On souhaite calculer l'intégrale

$$I \;:=\; \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}\,.$$

Notons tout de suite que la fonction $[0;2\pi] \ni t \mapsto 1/(2+\sin(t))$ est bien définie et continue, puisque, pour $t \in [0;2\pi]$, $|\sin(t)| \leq 1$. En écrivant $\sin(t)$ comme la partie imaginaire de e^{it}, on a

$$I \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{2i}{4i \,+\, \mathrm{e}^{it} \,-\, \mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{2i\mathrm{e}^{it}}{\mathrm{e}^{i2t} \,+\, 4i\mathrm{e}^{it} \,-\, 1}\,\mathrm{d}t\,.$$

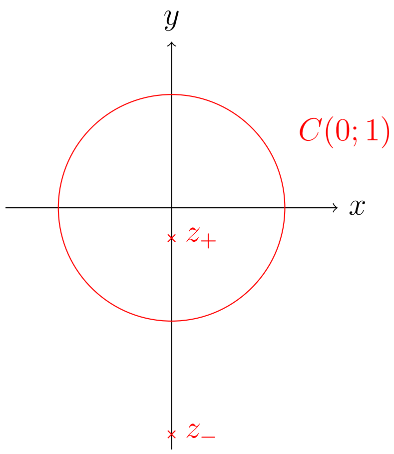
On interprète I comme l'intégrale le long du chemin fermé $\gamma : [0; 2\pi] \ni t \mapsto e^{it}$, qui est de classe C^1 (cf. corollaire 2.4), de la fonction f, définie dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = 2/(z^2 + 4iz - 1)$. Comme, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + 4iz - 1 = (z + 2i)^2 + 3 = \big(z + 2i + i\sqrt{3}\big)\big(z + 2i - i\sqrt{3}\big),$$

et comme $z_- := -2i - i\sqrt{3}$ et $z_+ := -2i + i\sqrt{3}$ n'appartiennent pas à $C(0;1) = \gamma([0;2\pi])$, la fonction f est bien continue sur $\gamma([0;2\pi])$ et on a bien

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2}{\mathrm{e}^{i2t} + 4i\mathrm{e}^{it} - 1} i\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Par quotient (cf. proposition 1.25), f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S} = \{z_-; z_+\}$, qui est discret et fermé dans $\mathbb{C}$. On peut donc appliquer le théorème des résidus (cf. théorème 5.1) pour calculer I.
Comme $|z_-| = 2+\sqrt{3} > 1$ et $|z_+| = 2-\sqrt{3} < 1$, on a, d'après la proposition 2.9, $\mathrm{Ind}(\gamma; z_-) = 0$ et $\mathrm{Ind}(\gamma; z_+) = 1$. (On aurait pu calculer ces indices avec la méthode pratique vue en TD).



Il reste à calculer le résidu de f en z_+. D'après la factorisation précédente du dénominateur, z_+ en est un zéro simple. On applique le point 1 (ou le 3) de la proposition 5.8. On a donc

$$\mathrm{Res}(f; z_+) = \frac{2}{z_+ - z_-} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\,.$$

D'où $I = 2i\pi \times 1/(i\sqrt{3}) = (2\pi)/\sqrt{3}$, qui est un réel positif, ce qui est normal puisque I est une intégrale usuelle d'une fonction réelle et positive.

Remarque 5.4. *Avec le même type de raisonnement, on peut calculer des intégrales du type*

$$\int_0^{2\pi} \frac{P(\cos(t); \sin(t))}{Q(\cos(t); \sin(t))}\,\mathrm{d}t\,,$$

où P, Q sont des polynômes de deux variables. Vous avez vu en L1 qu'on pouvait calculer ce type d'intégrale avec un changement de variables de la forme $u = \tan(t/2)$, $u = \cos(t)$, $u = \sin(t)$ ou $u = \tan(t)$ (règles de Bioche). Essayez d'appliquer cette méthode ici et comparez avec le calcul effectué ci-dessus.

On termine par le calcul, pour $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair, de

$$I_n \ := \ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\,.$$

Comme n est pair, le dénominateur ne s'annule pas donc la fonction à intégrer est continue. De plus, pour $|x| \geq 1$, on a $(1+x^n)^{-1} = O(x^{-2})$ et les intégrales de Riemann

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

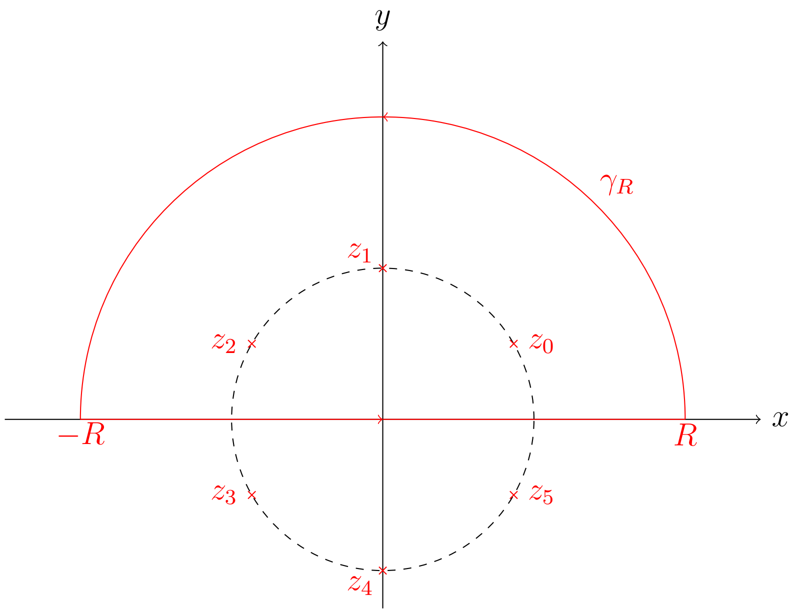
convergent. Donc I est absolument convergente, par comparaison.
Là encore, on voit une méthode en L1 qui permet de calculer ce type d'intégrales. La fonction $f(x) = 1/(1+x^n)$ est une fraction rationnelle. Il "suffit" donc de factoriser $1+x^n$ en produit de facteurs irréductibles et de décomposer f en éléments simples. Pour n assez petit, disons 2 ou 4, ça se fait assez bien mais si $n = 14$, par exemple, ce n'est plus aussi simple. C'est surtout très fastidieux.
On contourne ici cette difficulté en utilisant le théorème des résidus (cf. théorème 5.1). Comme l'intégrale a lieu sur un intervalle non borné, on doit l'approcher par des intégrales sur un segment afin de pouvoir utiliser le théorème des résidus. Puisque l'intégrale I converge, $I = \lim_{R\to+\infty} I_R$ avec

$$I_R \ := \ \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\,.$$

Soit f la fonction définie dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = (1+z^n)^{-1}$. Par quotient (cf. proposition 1.25), f est holomorphe à singularités isolées sur $\mathbb{C}$, qui est étoilé, d'ensemble de singularités isolées $\mathcal{S}$ égal à l'ensemble des racines $n$ièmes de -1 : $\mathcal{S} = \{z_k\,;\ 0 \leq k \leq n-1\}$ avec

$$z_k \ = \ \exp\bigl(i\pi/n \ + \ 2ik\pi/n\bigr)\,.$$

En particulier, $\mathcal{S} \subset \mathcal{U}$ et $\mathcal{S} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, puisque l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, donnée par $x^n = -1$, n'a pas de solution. De plus, pour tout k, z_k est un pôle simple de f car z_k n'annule pas la dérivée du dénominateur de f. Pour $R > 1$, soit Γ_R la concaténation des chemins C^1 $\psi_{-R;R}$ et $\gamma_R : [0;\pi] \ni t \mapsto Re^{it}$. On fait le dessin de la situation dans le cas $n = 6$.



On a

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\psi_{-R;R}} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; I_R + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\,. \tag{5.13}$$

Pour $z \in \mathcal{S}$, on a $\mathrm{Ind}(\Gamma_R; z) = 0$, si $\mathrm{Im}(z) < 0$, et $\mathrm{Ind}(\Gamma_R; z) = 1$, si $\mathrm{Im}(z) > 0$ (cf. la méthode de calcul d'indice du TD). Par le théorème des résidus (cf. théorème 5.1), on a (5.6) qui se réduit à

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \sum_{k=0}^{(n/2)-1} \mathrm{Res}(f;\, z_n)\,.$$

Pour $0 \leq k \leq (n/2) - 1$, on applique le point 3 de la proposition 5.8 pour obtenir

$$\mathrm{Res}(f;\, z_k) \;=\; \frac{1}{n z_k^{n-1}} \;=\; \frac{e^{-i\pi\frac{(n-1)(2k+1)}{n}}}{n} \;=\; \frac{(-1)^{2k+1}\, e^{i\pi(2k+1)/n}}{n} \;=\; -\,\frac{e^{i\pi(2k+1)/n}}{n}\,.$$

Donc, puisque $2i\pi/n \neq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;&=\; -\,\frac{2i\pi}{n} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} e^{i\pi(2k+1)/n} \;=\; -\,\frac{2i\pi\, e^{i\pi/n}}{n} \sum_{k=0}^{(n/2)-1} (e^{2i\pi/n})^k \\
&= -\,\frac{2i\pi\, e^{i\pi/n}}{n}\,\frac{1 - (e^{2i\pi/n})^{n/2}}{1 - e^{2i\pi/n}} \;=\; -\,\frac{4i\pi\, e^{i\pi/n}}{n\,(1 - e^{2i\pi/n})} \;=\; \frac{-2\pi\, 2i}{n\,(e^{-i\pi/n} - e^{i\pi/n})} \\
&= \frac{2\pi}{n\,\sin(\pi/n)}\,,
\end{aligned}$$

qui est indépendant de R. Par ailleurs, on a, pour $R > 1$,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;=\; \left|\int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1 + R^n e^{int}}\,\mathrm{d}t\right| \;\leq\; \int_0^{\pi} \frac{R}{|1 + R^n e^{int}|}\,\mathrm{d}t \;\leq\; \frac{R\,\pi}{R^n - 1}\,.$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé : pour tout $t \in [0;\pi]$, $R^n = |R^n e^{int}| \leq |1 + R^n e^{int}| + 1$ donc $|1 + R^n e^{int}| \geq R^n - 1 > 0$. Comme $n > 1$, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0, quand $R \to +\infty$, donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,,$$

par le théorème des gendarmes. En passant à la limite $R \to +\infty$ dans (5.13), on obtient

$$\frac{2\pi}{n\,\sin(\pi/n)} \;=\; I\,.$$