Eq. diff. du 2è ordre.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'éq. (e) : $y'' - y = e^{2t}$.
Il est sous-entendu de chercher les sol. à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note par S l'ens. des sol. réelles.
On résoud l'éq. homogène associée (e_0) : $y'' - y = 0$.
L'éq. caract. est : $z^2 - 1 = 0$ dont les sol. sont -1 et 1.
Par le cours, l'ens. S_0 des sol. réelles de $y'' - y = 0$
est un plan vectoriel : $S_0 = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(y_1 ; y_2)$ où
$y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t} \end{array}$.

Par le cours, $S = \{ y_p + y ; y \in S_0 \} = \{ y_p + k_1 y_1 + k_2 y_2 ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \}$
$= \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y_p(t) + k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \end{array} ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

où y_p est une sol. de (e).
On la cherche sous la forme : $y_p(t) = c e^{2t}$ avec
$c \in \mathbb{R}$.

* le second memb. est du type $e^{\alpha t} \underbrace{P(t)}_{\text{poly.}}$ avec $d°P = 0$.
* 2 n'est pas racine de l'éq. caract.

On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $y_p'(t) = 2c e^{2t}$ et $y_p''(t) = 4c e^{2t}$.
On a
$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ 4c e^{2t} - c e^{2t} = e^{2t}$
$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ 3c = 1$ (car $t \mapsto e^{2t}$ ne s'annule pas)
$\iff 3c = 1 \iff c = 1/3$.

Donc $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est sol. de (e).
$t \mapsto \frac{1}{3}e^{2t}$

Que se passe-t-il si l'on résoud l'ég. (e) sur $\mathbb{R}$ en cherchant les sol. complexes ?

On résout l'ég. homogène (e_0) : $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

L'ég. caract. est : $z^2 = 1$, les sol. sont 1 et -1.

Par le cours, $S_0 = \text{vect}_{\mathbb{C}}(y_1 ; y_2)$ où y_1 et y_2 sont les fonct. précédentes.

Donc $S_0 = \{ k_1 y_1 + k_2 y_2 ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{C}^2 \}$.

La fonct. y_P précédente est sol. de (e) donc

$S = \{ y_P + k_1 y_1 + k_2 y_2 ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{C}^2 \}$.

Trouver les sol. réelles de l'ég. (f) : $y'' - y = e^{2t} + ch(t)$ sur $\mathbb{R}$. Rappel : $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

On résoud l'ég. homogène (e_0) associée. On trouve $S_0 = \text{vect}_{\mathbb{R}}(y_1 ; y_2)$ avec $y_1 : t \mapsto e^t$ et $y_2 : t \mapsto e^{-t}$. (voir plus haut). Par le cours,

$S = \{ y_P + y ; y \in S_0 \}$ où y_P est une sol. (réelle) de (f).

3

le second memb. n'est pas du type $e^{\alpha t}P(t)$ avec P poly. **mais**

$$e^{2t} + ch(t) = \underbrace{e^{2t}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{t}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{-t}}$$

du type $e^{\alpha t}P(t)$ avec P poly.

→ on cherche une sol. y_{P_1} de $y''-y=e^{2t}$

→ ——————— y_{P_2} de $y''-y=\frac{1}{2}e^{t}$

→ ——————— y_{P_3} de $y''-y=\frac{1}{2}e^{-t}$

et on applique le principe de superposition.

On cherche y_{P_0} sol. de $y''-y=e^{2t}$ sous la forme $y_{P_0}(t)=ce^{2t}$. ——— On trouve que $y_{P_0} : t \longmapsto \frac{1}{3}e^{2t}$ est sol. de $y''-y=e^{2t}$ sur $\mathbb{R}$ (voir plus haut).

Pour $\varepsilon \in \{-1;1\}$, on cherche une sol. y_{P_ε} de $y''-y=\frac{1}{2}e^{\varepsilon t}$ sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$y_{P_\varepsilon}(t) = e^{\varepsilon t}(at+b) \quad \text{avec } (a;b)\in\mathbb{R}^2$$

(car $d^\circ(t\mapsto \frac{1}{2})=0$ et ε est sol. simple de l'éq. caract.).

On a $\quad y'_{P_\varepsilon}(t) = \varepsilon e^{\varepsilon t}(at+b) + e^{\varepsilon t}a$

$$y''_{P_\varepsilon}(t) = \underbrace{\varepsilon^2}_{=1} e^{\varepsilon t}(at+b) + 2\varepsilon e^{\varepsilon t}a.$$

Soit S_ε l'ens. des sol. sur $\mathbb{R}$ et à val. dans $\mathbb{R}$ de $y''-y=\frac{1}{2}e^{\varepsilon t}$.

On a

$y_{P_\varepsilon} \in S_\varepsilon \iff \forall t\in\mathbb{R},\ \cancel{e^{\varepsilon t}(at+b)} + 2\varepsilon e^{\varepsilon t}a - \cancel{e^{\varepsilon t}(at+b)} = \frac{1}{2}e^{\varepsilon t}$

$\iff \forall t\in\mathbb{R},\quad 2\varepsilon a = \frac{1}{2}$

car $t \mapsto e^{\varepsilon t}$ ne s'annule pas.

Donc

$y_{P_\varepsilon} \in S_\varepsilon \iff a = \frac{\varepsilon}{4}$.

Donc $y_{P\varepsilon} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{\varepsilon}{4} t e^{\varepsilon t}$ est sol. de

$y'' - y = \frac{1}{2} e^{\varepsilon t}$.

Comme, pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{2t} + ch(t) = e^{2t} + \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{2} e^{-t}$,

la fonct. $y_P = y_{P_0} + y_{P_{+1}} + y_{P_{-1}}$ est sol. de

$y'' - y = e^{2t} + ch(t)$ par le principe de superposition.

Méthode de variation des constantes : explique.

hors programme.

✓