4.1. 43

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0\times 2\times 5 + 0\times 7\times 0 + 4\times 5\times 5 - 0\times 2\times 4 - 5\times 5\times 0 - 5\times 7\times 0$$

$$= 100.$$

dév.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} + 0\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4\times\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\times\left[5\times(-1)^{1+1}\times|5| + 0\times(-1)^{1+2}|2|\right]$$

$$= 4\times 5\times 5 = 100.$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5\times(-4\times 5) = 100.$$

4×0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\times 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5×0

$$= -5\times 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - \tfrac{5}{2}C_2$$

$$= -5\times 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -5/2 \end{vmatrix} = -5\times 4\times 1\times 2\times\frac{-5}{2}$$

$$= 100$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$= 6 \times (-1) \times (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6\,(15 - 1) = -6 \times 14.$$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 + 0 + 5 \times 5 \times 2 - 2 \times 2 \times 2 - 5 \times 5 - 0)$$

$$= 2\,(5 \times 5 - 8) = 2\,(25 - 8) = 34.$$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^3 = -8.$$

4.2. $C_3 \leftarrow C_3 + 10C_2 + 100C_1$ 45

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 3 & 132 \\ 0 & 9 & 99 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 3 \times \underbrace{99}_{\text{div. par } 11} + 0 + 9 \times \underbrace{121}_{\text{div. par } 11}$$

$$- 0 - 9 \times \underbrace{132}_{\text{div. par } 11} - 2 \times \underbrace{99}_{\text{div. par } 11}$$

$$= 11p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

4.3.

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{matrix}$$

$$= (1+a+b+c)$$

Alternative

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+b & b \\ 0 & c & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1+b & b \\ c & 1+c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ b & 1 & b \\ c & 0 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b \\ c & 1+c \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} a & a \\ c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= 1+c + b \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= 1+c+b\Big(\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix}}_{=c} \Big) + a\Big(\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & c \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \Big)$$

$$= 1+a+b+c.$$

5.4.

Rq. : s'il existe $i \neq j$ tq. $\alpha_i = \alpha_j$,
$V_n(\alpha_1; \dots; \alpha_n) = 0$ car 2 col. sont identiques.

a). $V_2(\alpha_1;\alpha_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1$.

$$V_3(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha_3+\alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1).$$

b). Pour $0 \leq j \leq n-1$ soit $v_j = \begin{pmatrix} \alpha_1^j \\ \vdots \\ \alpha_n^j \end{pmatrix}$.

Soit $(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tq. $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j v_j = 0$. Donc

pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n-1$, $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j \alpha_i^j = 0$.

Donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines distinctes de

$P = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j X^j$ qui est de degré $\leq n-1$.

Par le cons, $P=0$. Dnc $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.
$(v_0;v_1;\cdots;v_{n-1})$ est donc libre.

Donc $V_n(\alpha_1;\cdots;\alpha_n)\neq 0$.

d).

dév. selon la dernière col.

$$V_n(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1};X)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+i}X^{i-1}a_j$$

pour des a_j complexes. De plus

$$a_n=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & & \alpha_{n-1}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha_1^{n-2} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=V_{n-1}(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1})\neq 0.$$

Dnc $V_n(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1};x)$ est un poly. de deg $n-1$
et de coeff. dominant $V_{n-1}(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1})$.

e). Pour $1\leq j\leq n-1$,

$V_{n-1}(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1};\alpha_j)=0$
car 2 col. sont identiques dans ce dét.
Dnc la fact. en irréd. sur $\mathbb{C}[X]$ de
$V_n(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1};X)$ est

$$V_{n-1}(\alpha_1;\cdots;\alpha_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}(X-\alpha_i).\quad (\alpha)$$

g). Pour $n \geq 2$, Soit

$$\mathcal{P}(n) = \left(V_n(\alpha_1; \cdots; \alpha_n) = \prod_{\substack{(i;j) \in [\![1;n]\!]^2 \\ i<j}} (\alpha_j - \alpha_i) \right).$$

$\left([\![1;n]\!] := [1;n] \cap \mathbb{N} \right)$.

$\mathcal{P}(2)$ et $\mathcal{P}(3)$ sont vraies.

Supp. $\mathcal{P}(n-1)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

On a, par $(*)$,

$$V_n(\alpha_1; \cdots; \alpha_{n-1}; \alpha_n) = V_{n-1}(\alpha_1; \cdots; \alpha_{n-1}) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (\alpha_n - \alpha_i)$$

$$\overset{H.R.}{=} \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\alpha_j - \alpha_i) \times \prod_{1 \leq i \leq n-1} (\alpha_n - \alpha_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Par le Th. de récu.,
$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.