Calculs par bloc

$$\begin{array}{c} \\ p \end{array}\begin{array}{c} \overset{m}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} m \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \overset{q}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I_n & C \\ (0) & I_m \end{vmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ (\text{cf. déf.})}}{1} = \begin{vmatrix} I_n & (0) \\ D & I_m \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ (0) & I_m \end{vmatrix} = \det A$$

$$\begin{vmatrix} I_n & C \\ (0) & B \end{vmatrix} = \det B$$

$$\begin{vmatrix} A & C \\ (0) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B$$

car $\begin{pmatrix} A & C \\ (0) & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ (0) & I_m \end{pmatrix}$

5.1. Le syst. est équivalent à

$$B\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\quad(*)$$

Comme B est inv.,

$$(*)\iff B^{-1}\cdot B\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\iff I_3\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2&5\\-9&5&-11\\-7&4&-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}29\\-62\\-50\end{pmatrix}$$

5.2.

a).

$$\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}1\times4&-3\\-2&1\times1\end{pmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}\quad\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}$$

donc $\ {}^t\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$. De plus $\det(A)=4-6=-2\neq0$

Par le cours, A est inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{Com}(A)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}.$$

Résolution du syst. : $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

$$A\cdot X=Y\iff\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x_1+2x_2=y_1\\3x_1+4x_2=y_2\end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\iff}\begin{cases}x_1+2x_2=y_1\\x_1+0=y_2-2y_1\end{cases}\iff\begin{cases}x_1=y_2-2y_1\\x_2=\dfrac{y_1-x_1}{2}=\dfrac{3y_1-y_2}{2}\end{cases}\iff X=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}Y$$

Cas général 2x2 :

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Donc $A = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Vérification :

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

or

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 = \det A.$$

$$\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 3 & -12 & 11 \\ -3 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

52

Par le cours,

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -7 & -12 & 11 \\ 6 & 11 & -10 \end{pmatrix}$$

Système :

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = y_1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 4x_1 + x_2 + 0 = y_3 - y_1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11x_1 - 3x_2 = y_1 - 3y_2 & L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ 4x_1 + x_2 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ x_2 + x_3 = y_2 - y_3 + y_1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ 4x_1 + x_2 = y_3 - y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 = -y_1 + y_3 - 4(-2y_1 - 3y_2 + 3y_3) \\ x_3 = y_1 + y_2 - y_3 - (7y_1 + 12y_2 - 11y_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ x_2 = 7y_1 + 12y_2 - 11y_3 \\ x_3 = -6y_1 - 11y_2 + 10y_3 \end{cases} \iff X = A^{-1}Y.$$