4.3.

On a

$$D(x) = \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1}}{} \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1) \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{} \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} (x+1) \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & 2(x+1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x+8 \end{vmatrix} \underset{\text{dév. } 2^{e} \text{ ligne}}{=} (x+1)^2 \, 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3x+8 \end{vmatrix}$$

$$= -(x+1)^2 (3x+6) = -3(x+1)^2 (x+2).$$

Donc

$D(x) = 0 \iff x+1 = 0$ ou $x+2 = 0 \iff x \in \{-1; -2\}$.

5.5.

On peut remarquer que les 2 dernières lignes de A sont liées donc $\det A = 0$ et $\operatorname{rg} A \leq 2$. Comme le déterminant extrait de A : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, $\operatorname{rg} A \geq 2$. Donc $\operatorname{rg} A = 2$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc de rang 2. Si elle était libre, elle serait une base donc de rang 3. Contra. Donc elle est liée. $\dim \operatorname{vect}(v_1; v_2; v_3) = \operatorname{rg}(v_1; v_2; v_3) = 2$.

Alternative pour trouver le rang de A : Pivot de Gauss,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \ ! \ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{-1}{2} L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{-1}{3} L_3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par le cours, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_3 = 2$.

Par le cours, $\operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg}(A) = 2$.

Pivot de Gauss pour B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2, \ B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} B_3 = 3$, B est inversible

et (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Calcul de l'inverse de B par le pivot de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -L_2,\ L_3 \leftarrow -L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3,\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

B^{-1}!!

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pivot de Gauss pour M :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$L_2 \leftrightarrow L_4$ et $L_2 \leftarrow -L_2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$L_4 \leftarrow \frac{-1}{4} L_4$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_4,\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -2 & 1 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \leftarrow M^{-1}.$$

5-6. Pivot de Gauss :

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m^2 & 1 & 1 \\ 1 & m^2 & 1 \end{pmatrix}$$ (Commentaire)

$L_2 \leftarrow L_2 - m^2 L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$A_2(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^3 \\ 0 & m^2-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$A_3(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m^3 \\ 0 & 0 & -\lambda(m) \end{pmatrix}$$

où $\lambda(m) = m-1 + m^3-1 = (m-1)+(m-1)(m^2+m+1)$
$= (m-1)\underbrace{(m^2+m+2)}_{>0}$

Par le cours, $\operatorname{rg} A(m) = \operatorname{rg} A_3(m)$ et $\det A(m) = -\det A_3(m)$.

<u>1er cas</u> : $m \notin \{-1;1\}$. On a $1-m^2 \neq 0$ et $\lambda(m) \neq 0$ donc $\operatorname{rg} A_3(m) = 3$. D'où $\operatorname{rg} A(m) = 3$ et $A(m)$ est inversible.

<u>2e cas</u> : $m = 1$. Alors $1-m^2 = 0 = \lambda(m) = 1-m^3$ donc $\operatorname{rg} A_3(1) = 1$ et $\operatorname{rg} A(1) = 1$.

<u>3e cas</u> : $m = -1$.

$$A_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$