$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

$$A_4(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rg} A_4(-1) = 2$.

On a donc

(v_1, v_2, v_3) base $\Leftrightarrow A(m)$ inv. $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A(m) = 3 \Leftrightarrow m \notin \{-1;1\}$.

Pour $m \notin \{-1;1\}$, calcul de $A(m)^{-1}$.

On a

$$\operatorname{Com}(A(m)) = \begin{pmatrix} m-1 & 1-m^3 & m^2-1 \\ 1-m^3 & m-1 & m^2-1 \\ m^2-1 & m^2-1 & 1-m^4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A(m)) = -\det A_3(m) = -(m^2-1)\lambda(m)$$
$$= -(m-1)^2(m+1)(m^2+m+2).$$

Donc

$$A(m)^{-1} = \frac{-1}{(m-1)^2(m+1)(m^2+m+2)} \begin{pmatrix} m-1 & 1-m^3 & m^2-1 \\ 1-m^3 & m-1 & m^2-1 \\ m^2-1 & m^2-1 & 1-m^4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{(m-1)(m+1)(m^2+m+2)} \begin{pmatrix} 1 & -(m^2+m+1) & m+1 \\ -(m^2+m+1) & 1 & m+1 \\ m+1 & m+1 & -(m^3+m^2+m+1) \end{pmatrix}$$

5.7. Dans la base $(1; X; X^2)$,

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Donc $\operatorname{rg}(P; Q; R) = \operatorname{rg} A = 3$.

La famille (P, Q, R) est donc génératrice car $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$.

C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Rappel : * Soit E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n et p, respectivement, Soit $f : E \to F$ une appl. liné. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1 ; \dots ; e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1 ; \dots ; f_p)$.

La matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E ; \mathcal{B}_F}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \end{array}$$

dont, pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

* Le produit de matrices a été choisi de sorte que, pour $f : E \xrightarrow[\text{liné}]{} F$ et $g : F \xrightarrow[\text{liné}]{} G$, $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F et $\mathcal{B}''$ base de G,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B} ; \mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}' ; \mathcal{B}''}(g) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B} ; \mathcal{B}'}(f).$$

* Pour $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ deux bases de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\tilde{\mathcal{B}}$ est la matrice de l'appl. liné. $id_E : E \to E$ rel. aux bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$P_{\mathcal{B} ; \tilde{\mathcal{B}}} = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}} ; \mathcal{B}}(id_E) \text{ et } P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B} ; \tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1}.$$

Changement de coordonnées : Soit $(x_1 ; \dots ; x_n)$ et $(\tilde{x}_1 ; \dots ; \tilde{x}_n)$ les coordonnées de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\tilde{\mathcal{B}}$ respectivement.

Alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$.

Pour s'en souvenir et éviter d'écrire $\cancel{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$

on peut considérer $x = \tilde{e}_1$. On a

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donne la } 1^{\text{ère}} \text{ colonne}$$

de $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$ qui est bien constituée des coord. de $\tilde{e}_1$ dans $\mathcal{B}$.

$\checkmark$

* Soit $f : \underset{\substack{\mathcal{B}_E \\ \mathcal{B}'_E}}{E} \to \underset{\substack{\mathcal{B}_F \\ \mathcal{B}'_F}}{F}$ lin.

Pour se souvenir de la formule de changement de base entre $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f)$

on écrit : $f = id_F \circ f \circ id_E$

$$\begin{tikzcd}
(E ; \mathcal{B}'_E) \arrow[r, "f", "\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f)"'] \arrow[d, "id_E"'] & (F , \mathcal{B}'_F) \\
(E ; \mathcal{B}_E) \arrow[r, "f", "\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f)"'] & (F ; \mathcal{B}_F) \arrow[u, "id_F"']
\end{tikzcd}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}'_F}(f) &= \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F;\mathcal{B}'_F}(id_F) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_E;\mathcal{B}_E}(id_E) \\
&= P_{\mathcal{B}'_F;\mathcal{B}_F} \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \cdot P_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}'_E} \\
&= (P_{\mathcal{B}_F;\mathcal{B}'_F})^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}_F}(f) \; P_{\mathcal{B}_E;\mathcal{B}'_E} .
\end{aligned}$$