6.1.

1). Comme $\dim E = 3$, il suffit de montrer que $\tilde{\mathcal{B}}$ est géné., c'est-à-dire que $\operatorname{rg} \tilde{\mathcal{B}} = 3$.

On a :

$$\operatorname{rg} \tilde{\mathcal{B}} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

On a

$$P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \tilde{e}_1 & \tilde{e}_2 & \tilde{e}_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

On a

$$\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = e_1 + e_2 - (e_2 + e_3) + e_1 + e_3 = 2e_1$$
$$\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 - \tilde{e}_3 = e_1 + e_2 + e_2 + e_3 - (e_1 + e_3) = 2e_2$$
$$-\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2 + \tilde{e}_3 = -(e_1 + e_2) + e_2 + e_3 + (e_1 + e_3) = 2e_3.$$

Donc $$P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi calculer l'inverse de $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$ par l'une des méthodes vues précédemment.

3). Soit $(\tilde{a};\tilde{b};\tilde{c})$ les coord. de x dans $\tilde{\mathcal{B}}$. Par le cours

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} = P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b-c \\ -a+b+c \\ a-b+c \end{pmatrix}$$

On a : $$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = I_3$$

et $$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f) = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}}(id)\overbrace{\mathcal{M}_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}(f)}^{I_3}$$
$$= P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$$

6.1.

$$\widetilde{e_1} = e_1 + e_2$$
$$\widetilde{e_2} = e_2 + e_3$$
$$\widetilde{e_3} = e_1 + e_3.$$

1) Au choix, on montre :

- $\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{B}} = \operatorname{rg}(A) = 3$ où $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \widetilde{e_1} & \widetilde{e_2} & \widetilde{e_3} \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$
- A est inversible
- $\widetilde{\mathcal{B}}$ est géné.
- $\widetilde{\mathcal{B}}$ est libre.

(Au vu de la question 2, on montre que A est inversible et on calcule son inverse),

On va utiliser une astuce pour réduire les calculs).

On a

$$(*) \begin{cases} \widetilde{e_1} + \widetilde{e_2} - \widetilde{e_3} = e_1 + e_2 + e_2 + e_3 - (e_1 + e_3) = 2e_2 \\ \widetilde{e_1} - \widetilde{e_2} + \widetilde{e_3} = e_1 + e_2 - (e_2 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2 e_1 \\ -\widetilde{e_1} + \widetilde{e_2} + \widetilde{e_3} = -(e_1 + e_2) + (e_2 + e_3) + (e_1 + e_3) = 2e_3. \end{cases}$$

Montrons que $\widetilde{\mathcal{B}}$ est génératrice. Soit $x \in E$.
Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ tq.
$x = ae_1 + be_2 + ce_3$. Donc

$$(**) \quad x = a \times \frac{1}{2}(\widetilde{e_1} - \widetilde{e_2} + \widetilde{e_3}) + \frac{b}{2}(\widetilde{e_1} + \widetilde{e_2} - \widetilde{e_3}) + \frac{c}{2}(-\widetilde{e_1} + \widetilde{e_2} + \widetilde{e_3})$$
$$\in \operatorname{vect}(\widetilde{\mathcal{B}}).$$

Donc $\widetilde{\mathcal{B}}$ est géné. Comme $\widetilde{\mathcal{B}}$ a 3 élé, et $\dim E = 3$, c'est une base.

2). Par déf.

$$P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{array}{c|c} & \tilde{e}_1 \ \ \tilde{e}_2 \ \ \tilde{e}_3 \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$ et, par (*),

$$P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}} = \begin{array}{c|c} & e_1 \ \ e_2 \ \ e_3 \\ \hline \begin{matrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\left(= \left(P_{\mathcal{B},\tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1} \text{ par le cours.} \right)$

3)- D'après le calcul précédent (**),

$$x = \frac{1}{2}(a+b-c)\tilde{e}_1 + \frac{1}{2}(-a+b+c)\tilde{e}_2 + \frac{1}{2}(a-b+c)\tilde{e}_3.$$

4).

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c|c} & f(e_1) \ \ f(e_2) \ \ f(e_3) \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \underbrace{\begin{array}{c|c} & \tilde{e}_1 \ \ \tilde{e}_2 \ \ \tilde{e}_3 \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}}_{P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}}$$

$$= P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}},$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{array}{c|c} & f(e_1) \ \ f(e_2) \ \ f(e_3) \\ \hline \begin{matrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Rq.</u> : f est bij. (car $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$ est inversible

$$P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}\right)^{-1} = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f^{<-1>})$$

où $f^{<-1>}$ est la bij. réc. de f.