6.2 :

1 - $$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: A.$$

2 - $rg(f) = rg(A) \leq 2$ (car il n'y a que 2 lignes).

$\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ est un déterminant extrait de A

donc $rg(A) \geq 2$. D'où $rg(f) = rg(A) = 2$ -

3 - Par le cours, les coordonnées $(y_1; y_2)$ de $f(x)$ dans $\tilde{\mathcal{B}}$ vérifient

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4 - Par le cours, $\dim \mathrm{Ker}(f) + rg(f) = \dim E$

donc $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3 - 2 = 1$.

6.3.

1 - $$\mathcal{M}_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{dév. / 3ème ligne}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Donc A est inversible. Donc f est inversible.

Question supplémentaire :
déterminer $f^{\langle -1 \rangle}$, la bij. réci. de f.

Il suffit de donner $\mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}};\mathcal{B}}(f^{\langle -1 \rangle})$.

Par le cours, $\mathcal{M}_{\hat{\mathcal{B}};\mathcal{B}}(f^{\langle -1 \rangle}) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B};\hat{\mathcal{B}}}(f)\right)^{-1} = A^{-1}$.

Calcul de A^{-1} :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +1 & -2 & +0 \\ -5 & +3 & -0 \\ +5 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

2). $\mathcal{M}_{\mathcal{B};\hat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{dév. / 3è ligne}}{=} 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Donc B n'est pas inv. et g non plus.

Questions suppl. : déterminer une base de $\operatorname{Ker} g$ et une base de $g(\mathbb{R}^3)$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ds la base $\mathcal{B}$.

$$X \in \operatorname{Ker} g \iff BX = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} g$ est une dte eng. par $\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ds $\mathcal{B}$.

Comme $3 = \dim E = \dim \operatorname{Ker}(g) + \dim g(E)$,
$rg(g) = \dim g(E) = 3 - 1 = 2$.

Soit $v_1 = \tilde{e_1} + \tilde{e_2}$ et $v_2 = \tilde{e_2} + \tilde{e_3}$. Par déf. de g,
$v_1 \in g(E)$ et $v_2 \in g(E)$.

Soit $(\lambda_1 ; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$.

Alors $\lambda_1 (\tilde{e_1} + \tilde{e_2}) + \lambda_2 (\tilde{e_2} + \tilde{e_3}) = 0$ donc
$\lambda_1 \tilde{e_1} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{e_2} + \lambda_2 \tilde{e_3} = 0$. Comme $\tilde{\mathcal{B}}$ est une
base, elle est libre donc $\lambda_1 = 0 = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2$.

Donc $(v_1 ; v_2)$ est libre, Comme elle a 2 élé.
et comme $\dim g(E) = 2$, $(v_1 ; v_2)$ est une
base de $g(E)$.