6.5. On a

$f(1) = 1 + 0 = 1$

$f(X) = X + 1$

$f(X^2) = X^2 + 2X$

donc

$$M_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

On a $\det(M_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f)) = 1 \neq 0$ donc $M_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f)$ est inversible et f aussi, par le cours.

Donc $rg(f) = 3$ (par le cours).

Comme $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$, on a

$$P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2X+1 & (X-1)^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

On a $\det(P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}) = 2$ et

$$Com(P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P_{\tilde{\mathcal{B}};\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Par le cours

$$M_{\tilde{\mathcal{B}};\tilde{\mathcal{B}}}(f) = (P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}})^{-1} M_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} \text{ Soit}$$

$$M_{\tilde{\mathcal{B}},\tilde{\mathcal{B}}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex. Suppl. n°2.

1 - Soit $(\lambda_1;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[1;2[}(x) = 0.$$

En particulier, pour $x = 1$, $0 + \lambda_2 = 0$ et pour $x = 0$, $\lambda_1 + 0 = 0$. D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et la famille $(e_1; e_2)$ est libre.

2 - (- on peut montrer que $(L(e_1); L(e_2))$ est libre
- on peut montrer que L est inv. et le cours dit alors qu'elle transforme une base en une base
- on peut montrer que $P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}}$ est inversible)

On a

$$\det(M_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(L)) = -1-1 = -2 \neq 0 \text{ donc } L$$

est inv. Par le cours, L transforme une base de E en une base. Comme $\mathcal{B}$ est une base par 1, $\tilde{\mathcal{B}}$ en est une aussi. On a :

$$P_{\mathcal{B};\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L(e_1) & L(e_2) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} = \mathcal{M}_{\mathcal{B};\mathcal{B}}(L).$$

3 - (on doit vérifier que M est bien à val. ds E et qu'elle est liné.)

Soit $f \in E$. Il existe $(\lambda_1;\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $f = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(Mf)(x) = \left(\lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[1;2[}(x)\right) \mathbb{1}_{[-1;1[}(x)$$

$$= \lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[\cap [-1;1[}(x) + \lambda_2 \mathbb{1}_{[1;2[\cap [-1;1[}(x)$$

$$= \lambda_1 \mathbb{1}_{[0;1[}(x) + 0.$$

Donc $Mf = \lambda_1 e_1 \in E$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f = \lambda\lambda_1 e_1 + \lambda\lambda_2 e_2$
donc, par le calcul précédent,

$$Mf = \lambda\lambda_1 e_1 = \lambda Mf.$$

Pour $g \in E$, il existe $(\mu_1;\mu_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $g = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$.
On a, par le calcul précédent,

$$Mg = \mu_1 e_1 \quad \text{et} \quad M(f+g) = (\lambda_1 + \mu_1) e_1$$

donc $M(f+g) = M(f) + M(g)$.

M est liné.