

R_g : on aurait pu montrer que l'appl.

71

$$\hat{M} : E \rightarrow E$$

$$f \mapsto fg$$

est linéaire, et dire que $M = \hat{M}|_E$
pour montrer que M est linéaire.

4. Par le calcul précé., $M(e_1) = e_1$ et $M(e_2) = 0$ donc

$$M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

5. On a

$$P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc $\det P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}} = -2$ et $\text{com}(P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc

$$P_{\tilde{\mathcal{B}}; \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}})^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par le cours

$$M_{\tilde{\mathcal{B}}; \tilde{\mathcal{B}}}(M) = (P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}})^{-1} M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(M) P_{\mathcal{B}; \tilde{\mathcal{B}}}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Soit $A = \mathcal{U}_{[1/2; 3/2[}$. On a $\mathcal{U}_A \mathcal{U}_{\text{co}A} = \mathcal{U}_{[1/2; 1[} \notin E$.

En effet, supposons qu'il existe

$$(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \forall x \in [0; 1[\quad \mu_A \mu_{[0; 1[} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu_{[1/2; 1[}(x) = \lambda_1 \mu_{[0; 1[} + \lambda_2 \mu_{[1; 2[}$$

donc, pour $x=0$, $0 = \lambda_1 + 0$ et pour $x=1$
 $0 = 0 + \lambda_2$. Dnc $\mu_{[1/2; 1[}$ est nulle, Contr.
 car $\mu_{[1/2; 1[}(1/2) = 1$.

Ex. suppl. n° 3 : on admet que les appl. sont linéaires.

1. Comme $\dim E = 4$, il suffit de montrer que $\tilde{B}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) \in \mathbb{R}^4$ t.q.

$$\lambda_{11}(E_{11} + E_{22}) + \lambda_{12}E_{12} + \lambda_{21}E_{21} + \lambda_{22}(E_{11} - E_{22}) = 0$$

Dnc

$$(\lambda_{11} + \lambda_{22})E_{11} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})E_{22} + \lambda_{12}E_{12} + \lambda_{21}E_{21} = 0$$

Comme B est une base, elle est libre dnc

$$\lambda_{11} + \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{11} - \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{12} = 0 \text{ et } \lambda_{21} = 0$$

Dnc $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$. Dnc $\tilde{B}$ est libre.

Alternative : on montre que

$$P_{\tilde{B}; \tilde{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_{11} & \tilde{E}_{12} & \tilde{E}_{21} & \tilde{E}_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix} \text{ est inversible.}$$

On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dév. / 4}^{\text{e}} \text{ ligne}} 2 \times (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

$$\xrightarrow{\text{dév. / 3}^{\text{e}} \text{ col.}} = 2 \times (-1) \times 1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

73

Donc $P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$ est inv. donc $\tilde{\mathcal{B}}$ est une base.

(Pour déterminer $P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$, on peut inverser $P_{\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}}$ par la méth. du Pivot ou par la formule avec la Comatrice.

On a $E_{11} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{11} + \tilde{E}_{22})$, $E_{22} = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{11} - \tilde{E}_{22})$
 $\tilde{E}_{12} = E_{12}$ et $\tilde{E}_{21} = E_{21}$ donc

$$P_{\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{21} & E_{22} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{L}_{11} \\ \text{L}_{12} \\ \text{L}_{21} \\ \text{L}_{22} \end{matrix}$$

2 - $\text{Tr}(\mathcal{E})$ est un s. esp. vect. de $\mathbb{R}$ et $\dim \mathbb{R} = 1$
 2 cas possibles: $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \{0\}$ ou $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$
 Tr n'est pas nulle car $\text{Tr}(I_2) = 2 \neq 0$,
 donc $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$.

Comme $\text{Tr}(I_2) = 2 \neq 0$, $\text{Tr}(\mathcal{E})$ est un s. esp. de $\dim \geq 1$ de $\mathbb{R}$. Or $\dim \mathbb{R} = 1$ donc $\text{Tr}(\mathcal{E}) = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}_0$ est une base de $\text{Tr}(\mathcal{E})$.

Comme $\dim \text{Ker}(\text{Tr}) + \dim \text{Tr}(\mathcal{E}) = \dim \mathcal{E}$ (par le son/s)
 on a $\dim \text{Ker}(\text{Tr}) = 4 - 1 = 3$.

Or a $\text{Tr}(E_{12}) = \text{Tr}(E_{21}) = \text{Tr}(E_{11} - E_{22}) = 0.$

Donc $(E_{12}; E_{21}; E_{11} - E_{22})$ est une famille de vect. de $\text{Ker}(\text{Tr})$. On montre qu'elle est libre.

Soit $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tq. $aE_{12} + bE_{21} + c(E_{11} - E_{22}) = 0$

Or a

$cE_{11} + aE_{12} + bE_{21} - cE_{22} = 0.$

Comme B est libre, on en déduit que $a=b=c=0$.

Donc $(E_{12}; E_{21}; E_{11} - E_{22})$ est une famille libre de $\text{Ker}(\text{Tr})$ qui est de dim. 3 donc c'est une base de $\text{Ker}(\text{Tr})$.

Or a

$M_{B, B_0}(\text{Tr}) = \begin{pmatrix} \text{Tr}(E_{11}) & \text{Tr}(E_{12}) & \text{Tr}(E_{21}) & \text{Tr}(E_{22}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3- Il suffit de vérifier que

$P_{B, B_A} = \begin{pmatrix} E_{11} & A & E_{21} & E_{22} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$ est inversible.

Or a

$\det(P_{B, B_A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Lr. / Lrd.}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) = -1 \neq 0$

donc P_{B, B_A} est inversible.

4- Soit $t \in \mathbb{R}$ tq. $f(t) = 0$. Donc $\begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $t=0$. Donc $\text{Ker } f = \{0\}$.

Par le cours, $\dim \text{Ker}(f) + \dim f(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}$ 75

d'où $f(\mathbb{R})$ est de dimension 1.

Comme $f(1) \neq 0$, $(f(1)) = (A)$ est une base de $f(\mathbb{R})$.

On a

$$M_{\mathcal{B}_0; \mathcal{B}_A}(f) = \begin{pmatrix} f(1) \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ A \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}.$$

5. On a

$$g(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$$

$$g(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

$$g(E_{21}) = AE_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -E_{11} - E_{21}$$

$$g(E_{22}) = AE_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_{12} - E_{22}.$$

D'où

$$M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} g(E_{11}) & g(E_{12}) & g(E_{21}) & g(E_{22}) \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$$

Comme $\det(M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(g)) = 1 \neq 0$, g est inv.

Par le cours. Par le cours, g^{-1} est déterminée par la matrice $M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(g^{-1})$ et celle-ci est $(M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(g))^{-1}$.

Étant donné $(x'; y'; z'; t') \in \mathbb{R}^4$, on résout

$$M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}. \quad (*)$$

On a

76.

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = x' \\ y - t = y' \\ -z = z' \\ -t = t' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - z' \\ y = y' - t' \\ z = -z' \\ t = -t' \end{cases}$$

D'm

$$M_{B;B}(g^{\leftarrow 1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

6 - Soit $M \in \mathbb{E}$. On a

$$\begin{aligned} f \circ \text{Tr} \circ g(M) &= f \circ \text{Tr}(AM) = f(\text{Tr}(AM)) \\ &= \text{Tr}(AM) A = h(M). \end{aligned}$$

7 - Par le cours,

$$M_{B;B}(h) = M_{B;B}(f) \times M_{B;B_0}(\text{Tr}) \times M_{B_0;B}(g).$$

Par le cours,

$$M_{B_0;B}(g) = \begin{pmatrix} P_{B_0;B} \\ -1 \end{pmatrix} M_{B_0;B_A}(g) I_1 = P_{B;B_A} M_{B;B_A}(g)$$

$$M_{B;B_0}(\text{Tr}) = \begin{pmatrix} I_1 \\ -1 \end{pmatrix} M_{\tilde{B};B_0}(\text{Tr}) P_{\tilde{B};B} = M_{\tilde{B};B_0}(\text{Tr}) P_{\tilde{B};B}$$

II

$$\begin{pmatrix} \text{Tr}(E_{11}) & \text{Tr}(E_{12}) & \text{Tr}(E_{21}) & \text{Tr}(E_{22}) \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} 1$$

Dnc

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

77

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_0; \mathcal{B}}(f).$$

et

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}_0}(Tr).$$

Dnc

$$M_{\mathcal{B}; \mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $h(E_{11}) \quad h(E_{12}) \quad h(E_{21}) \quad h(E_{22})$

On peut retrouver cela avec :

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix}$$

Ex. suppl. n°4,

78

1. On a

$$g(E_{11}) = 0 = g(E_{12}) ; \quad g(E_{21}) = E_{11} - E_{21} \quad \text{et}$$

$$g(E_{22}) = E_{12} - E_{22} . \quad \text{Dne}$$

$$M_{B,B}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $d(E_{11}) = E_{12}$, $d(E_{12}) = -E_{12}$
 $d(E_{21}) = E_{22}$ et $d(E_{22}) = -E_{22}$.

Dne

$$M_{B,B}(d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

2 - On a, par le pivot de Gauss pour $A = M_{B,B}(g)$,

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \quad \text{et} \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dnc} \quad \text{rg}(g) = \text{rg}(A) = \text{rg}(A_1) = 2,$$

Par le pivot de Gauss pour $B = {}^t M_{B,B}(d)$, on a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$B_2 \hookrightarrow L_4$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rg}(d) = \text{rg}(^t d) = \text{rg}(B) = \text{rg}(B_2) = 2$.

3 - Comme $\dim E = 4$, on a, par 2,

$$\dim \text{Ker}(g) = \dim \text{Ker}(d) = 4 - 2 = 2.$$

Comme $g(E_{11}) = g(E_{12}) = 0$ et $(E_{11}; E_{12})$ est libre, c'est une base de $\text{Ker}(g)$.

On a

$$\begin{aligned} d(E_{11} + E_{12}) &= 0 \\ d(E_{21} + E_{22}) &= 0 \end{aligned}$$

donc $(E_{11} + E_{12}; E_{21} + E_{22}) \in (\text{Ker}(d))^2$.

Si $(\lambda; \mu) \in \mathbb{Q}^2$ tq. $\lambda(E_{11} + E_{12}) + \mu(E_{21} + E_{22}) = 0$
alors $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\lambda = \mu = 0$

Donc $(E_{11} + E_{12}; E_{21} + E_{22})$ est une base de $\text{Ker}(d)$.

Rq. : $\text{Ker}(d) \neq \text{Ker}(g)$.

4 - On sait, par 2, que $\dim g(E) = 2 = \dim d(E)$.

On a $(E_{12}; E_{22}) \in d(E)^2$. Comme c'est une famille libre, c'est une base de $d(E)$. On a $(E_{11} - E_{21}; E_{12} - E_{22}) \in g(E)^2$. Comme elle est libre, c'est une base de $g(E)$.
(à détailler)