## Ex. 1.4.



(a) : $y''+y'+y=t^2+t+1$ sur $\mathbb{R}$ (Sol. réelles).

L'éq. homogène associée est $(a_0)$ : $y''+y'+y=0$ sur $\mathbb{R}$.

L'éq. caractéristique associée est : $z^2+z+1=0$.

Comme $\Delta = 1-4=-3=i^2\times(\sqrt{3})^2=(i\sqrt{3})^2$, les racines sont $r=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{r}$. Par le cours,

$$S_0=\{k_1y_1+k_2y_2 \,;\, (k_1;k_2)\in\mathbb{R}^2\}$$

où $y_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto \operatorname{Re}(e^{rt})=e^{-t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{array}$

et $y_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto \operatorname{Im}(e^{rt})=e^{-t/2}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{array}$.

Par le cours,

$$S=\{y_p+y \,;\, y\in S_0\}$$

où $y_p$ est une sol. de (a).

On cherche $y_p$ sous la forme

$y_p(t)=at^2+bt+c$ avec $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

(car 0 n'est pas sol. de l'éq. caract.)

On a, pour $t\in\mathbb{R}$,

$y_p'(t)=2at+b$ et $y_p''(t)=2a$.

//

6

On a

$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2a + 2at + b + at^2 + bt + c = t^2 + t + 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ (a-1)t^2 + (2a+b-1)t + 2a+b+c-1 = 0$

$\iff a-1=0$ et $2a+b-1=0$ et $2a+b+c-1=0$

$\iff a=1$ et $b=-1$ et $c=0$. $(*)$

Soit $y_p : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 - t\end{array}$. Comme $(*)$ est valide, $y_p \in S$.

(b) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$ (sol. réelles).

L'éq. caractéristique est : $z^2 + 2z + 1 = 0$ qui est équiv. à $(z+1)^2 = 0$. Elle admet donc $-1$ pour solution double. Par le cours,

$S_0 = \{k_1 y_1 + k_2 y_2 \,;\ (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$

où $y_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-t}\end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto te^{-t}\end{array}$.

Par le cours, $S = \{y_p + y \,;\ y \in S_0\}$ où $y_p$ est une sol. de (b).

On cherche $y_p$ sous la forme

$y_p(t) = e^{-t}(at^2 + bt + c)\,;\ (a;b;c) \in \mathbb{R}^3$

(car $-1$ est sol. double de l'éq. caract.)

On a, pour $t \in \mathbb{R}$,